



UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TESINA

Funciones Cópula en Probabilidad y Estadística. Aplicaciones

Eduardo García Portugués

Director: Wenceslao González Manteiga

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Facultade de Matemáticas

Octubre de 2010



UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TESINA

Funciones Cópula en Probabilidad y Estadística. Aplicaciones

Eduardo García Portugués

Director: Wenceslao González Manteiga

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Facultade de Matemáticas

Octubre de 2010

El Prof. Dr. Wenceslao González Manteiga, del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidade de Santiago de Compostela, como director de la memoria de licenciatura titulada:

**FUNCIONES CÓPULA EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA.
APLICACIONES**

realizada por Don Eduardo García Portugués, informa que el interesado se encuentra en condiciones de optar al Grado de Licenciado en Matemáticas en la modalidad de tesina, por lo que solicita que sea admitida a trámite para su lectura y defensa pública en la Facultade de Matemáticas de la Universidade de Santiago de Compostela.

En Santiago de Compostela, a 27 de octubre de 2010.

El director:

Prof. Dr. Wenceslao González Manteiga

El licenciado:

Eduardo García Portugués

Agradecimientos

Deseo agradecer al director de esta tesina, el profesor Wenceslao González Manteiga, por sus buenas orientaciones y apoyo durante la realización de este trabajo.

Al profesor Julio González Díaz, mi agradecimiento por su ayuda con \LaTeX en la edición de este documento y por sus consejos al respecto.

También quisiera agradecer la gestión de María Leyenda Rodríguez y M^a José Ginzo Villamayor de los datos que se utilizaron en el estudio de la dirección del viento y el SO_2 en las cercanías de la central térmica de As Pontes.

Por último, señalar que este trabajo ha sido financiado en parte por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) MTM2008-03010.

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	V
Índice de tablas	IX
Introducción	1
1. Cópulas bivariantes y propiedades básicas	3
1.1. Preliminares	3
1.2. Cópulas	7
1.3. Teorema de Sklar	13
1.4. Cópulas y variables aleatorias: midiendo la dependencia	19
1.4.1. Independencia	21
1.4.2. Dependencia perfecta y cotas de Fréchet–Hoeffding	21
1.4.3. Transformaciones monótonas e invarianza de cópulas	27
1.5. Componentes de una cópula, densidad y representación canónica	30
1.5.1. Componentes y densidad de una cópula	30
1.5.2. Conexión con la Teoría de la Medida	32
1.5.3. Representación canónica de la densidad	34
1.6. Cópulas de supervivencia	36
1.7. Simetría	41
1.8. Orden	45
2. Cópulas multivariantes	47
2.1. Definiciones, Teorema de Sklar y cotas de Fréchet–Hoeffding	47
2.2. Componentes y densidad de una cópula multivariante	54
2.3. Cópulas multivariantes de supervivencia	57
2.4. Orden	58

3. Construcción de cópulas	61
3.1. Método de inversión	61
3.2. Métodos geométricos	62
3.2.1. Construcción de cópulas singulares	62
3.2.2. Suma ordinal de cópulas y mezclas de M	64
3.2.3. Mixturas y sumas convexas	70
3.2.4. Cópulas con ciertas secciones horizontales o verticales	73
3.2.5. Cópulas con ciertas secciones diagonales	77
3.3. Métodos algebraicos	78
3.4. Cópulas con propiedades específicas	82
3.5. Construcción de cópulas multivariantes	84
4. Cópulas Arquimedianas	87
4.1. Definición	87
4.2. Propiedades	91
4.2.1. Componentes de una cópula Arquimediana	93
4.2.2. Distribución de $C(U, V)$	94
4.2.3. Extensión de cópulas Arquimedianas por transformaciones	96
4.2.4. Orden	97
4.2.5. Caracterizaciones	100
4.2.6. Propiedad Arquimediana	101
4.3. Cópulas Arquimedianas multivariantes	102
5. Simulación de cópulas	109
5.1. Método condicional	109
5.2. Simulación de cópulas Arquimedianas	116
5.3. Método de Marshall y Olkin	119
5.4. Algunos algoritmos particulares	122
5.4.1. Cópula Gaussiana	122
5.4.2. Cópula t de Student	123
5.4.3. Cópula de Farlie–Gumbel–Morgenstern	125
5.4.4. Cópula de Plackett	126
5.4.5. Cópula de Ali–Mikhail–Haq	127
5.5. Paquetes <code>copula</code> y <code>fCopulae</code>	127
6. Medidas de dependencia y cópulas	131
6.1. Medidas de concordancia	131
6.1.1. Tau de Kendall	138
6.1.2. Rho de Spearman	141

6.1.3.	Gamma de Gini	144
6.1.4.	Beta de Blomqvist	145
6.1.5.	Relación entre las medidas de concordancia	146
6.2.	Medidas de dependencia	148
6.2.1.	Sigma de Schweizer y Wolff	150
6.3.	Dependencia de las colas	151
6.4.	Cópulas empíricas y medidas de concordancia muestrales	155
6.5.	Dependencia de cuadrantes y monotonía de colas	158
6.6.	Dependencia multivariante	161
7.	Aplicaciones	165
7.1.	Aplicación a la regresión cuantil	165
7.2.	Método de Genest y Rivest para la estimación de cópulas Arquimedianas mediante la Tau de Kendall	170
7.3.	Cópulas y datos direccionales: relación entre dirección del viento y concentración de dióxido de azufre	180
8.	Catálogo de cópulas	203
	Conclusiones	219
A.	Complementos teóricos	223
A.1.	Prueba del Lema 1.5	223
A.2.	Otra caracterización de la dependencia perfecta	228
A.3.	Prueba de la Proposición 1.3	230
A.4.	Condición de Lipschitz y relación con la continuidad absoluta	232
A.5.	Convexidad y Medio-convexidad	233
B.	Códigos para las simulaciones	235
B.1.	Método condicional	235
B.2.	Simulación de cópulas Arquimedianas	237
B.3.	Método de Marshall y Olkin	239
B.4.	Algunos algoritmos particulares	240
C.	Códigos para las aplicaciones	243
C.1.	Aplicación a la regresión cuantil	243
C.2.	Método de Genest y Rivest para la estimación de cópulas Arquimedianas mediante la Tau de Kendall	246
	Bibliografía	253

Índice alfabético

261

Índice de figuras

1.1.	Gráfica de la función $H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}$	6
1.2.	Cóputas de <i>Ali-Mikhail-Haq</i> y <i>Cuadras-Augé</i> para $\theta = \frac{1}{2}$ y $\theta = -1$	8
1.3.	Gráficas y conjuntos de nivel de las cotas de Fréchet-Hoeffding y de la cóputa producto.	11
1.4.	Conjuntos de nivel 0.1 para diferentes cóputas de la familia de Mardia.	13
1.5.	Extensión de la cóputa Π mediante H_{Π}	19
1.6.	Conjunto comonótono y contramonótono.	22
1.7.	Densidad de la cóputa Gaussiana con $\rho = 0.5$	35
3.1.	Construcción de una cóputa singular.	63
3.2.	Cóputa singular C_{θ} con soporte $[(0, \theta), (\theta, 0)] \cup [(\theta, 1), (1, \theta)]$ para $\theta = 0.5$	63
3.3.	Estructura de la suma ordinal de cóputas.	65
3.4.	Suma ordinal de $\{\Pi, W, M\}$ con respecto a $\{[0, \frac{\theta}{2}], [\frac{\theta}{2}, \theta], [\theta, 1]\}$ con $\theta = 0.8$	65
3.5.	Construcción de una cóputa mezcla de M	67
3.6.	Regiones de la cóputa mezcla de M	67
3.7.	Mezcla de M	68
3.8.	Propiedad de una distribución de Plackett.	81
4.1.	Gráfica de f y g en el Corolario 4.3.	100
5.1.	Simulaciones para $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$ y H	111
5.2.	500 puntos de la cóputa $C_{\theta}(u, v) = \max(\theta uv + (1 - \theta)(u + v - 1), 0)$ con $\theta = 0.2$ y $\theta = 0.9$	111
5.3.	Simulaciones para la cóputa de Clayton con $\theta = 5$ en $n = 2$ y $n = 3$	114
5.4.	Simulación para las cóputas de Clayton con $\theta = 5$ y marginales normales para $n = 2$ y $n = 3$	114
5.5.	Simulaciones para la cóputa de Frank con $\theta = 5$ en $n = 2$ y $n = 3$	116
5.6.	Simulaciones para la 2-cóputa de Gumbel con $\theta = 2$ y $\theta = 5$	118
5.7.	Simulaciones $C_{\theta}(u, v) = \max\left(1 - [(1 - u)^{\theta} + (1 - v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right)$ con $\theta = 7$	119
5.8.	Simulaciones para las cóputas de Gumbel con $\theta = 3$ en $n = 2$ y $n = 3$	121

5.9. Simulaciones para las cópulas de Ali–Mikhail–Haq con $\theta = 0.9$ en $n = 2$ y $n = 3$	122
5.10. Simulación de la cópula Gaussiana con $n = 3$	124
5.11. Simulación de la cópula t de Student con $n = 3$	124
5.12. Simulación para la cópula de FGM.	125
5.13. Simulación para la cópula de Plackett.	126
5.14. Aplicaciones de <code>fCopulae</code> para ver las gráficas de la densidad y los puntos generados.	128
6.1. Distintos ejes de concordancia.	137
6.2. Región para (τ, ρ) en variables continuas.	147
6.3. Regiones para (β, τ) , (β, ρ) y (β, γ) en variables continuas.	148
7.1. Regresión en mediana para la cópula de Plackett con $\theta = 3$ y para la distribución con marginales $\mathcal{N}(3, 1)$ y $\mathcal{N}(0, 5)$	167
7.2. Curvas de regresión p -cuantil para la cópula Gaussiana con $\rho = 0.8$ y para la distribución $C_\rho^{Ga}(\text{We}(3, 2), \text{We}(5, 5))$	169
7.3. Curvas de regresión p -cuantil para la cópula de Frank con $\theta = 3$ y para la distribución $C_\theta(\Gamma(5, 4), t_2(3, 10))$	169
7.4. Diagramas de dispersión de los datos de uranio y del Sc y Co.	174
7.5. λ_n frente a las cinco $\lambda_{\hat{\alpha}}$ más próximas.	177
7.6. λ_n frente a las cinco $\lambda_{\hat{\alpha}}$ más próximas, para la cópula de supervivencia.	177
7.7. Curvas de regresión cuantil exactas para la cópula N14, frente a los rangos de la muestra.	178
7.8. Curvas de regresión cuantil estimadas con las distribuciones marginales empíricas.	178
7.9. Estimación núcleo de las densidades marginales del SC y Co.	179
7.10. Curvas de regresión cuantil estimadas con las distribuciones de las densidades núcleo.	179
7.11. Representación lineal y circular de la densidad y la distribución von Mises con $\mu = \pi$ y $\kappa = 10$	181
7.12. Histogramas y diagramas de cajas para el SO ₂	188
7.13. Histogramas para el viento y gráficos de dispersión viento–SO ₂	189
7.14. Situación de la central térmica y de las estaciones meteorológicas.	192
7.15. Histogramas circulares de la dirección del viento y la presencia de SO ₂	193
7.16. Vista de la estación B2 desde el sudeste (parque eólico de Coto Teixido).	194
7.17. Ajuste del SO ₂ en la estación B2 por $\text{We}(\hat{\lambda}_{MV}, \hat{k}_{MV})$	195
7.18. Estimaciones por mixturas de von Mises y STNN de la densidad de la dirección del viento.	197

7.19. Estimación no paramétrica de g para tres ventanas. 200

7.20. Densidad y conjuntos de nivel de $\hat{f}_{\Theta,R}$ para las ventanas $\kappa = 10, 100, 1000$. 201

7.21. Densidad y conjuntos de nivel de $\hat{c}_{\Theta,R}$ para las ventanas $\kappa = 10, 100, 1000$. . 202

A.1. Descomposición de B por casos. 227

Índice de tablas

1.1. Cópulas de supervivencia, duales y co-cópulas de las cópulas W , Π y M	38
1.2. Grupo dihédrico Dih_2 para \wedge , \sim y $*$	40
3.1. Tabla de contingencia 2×2	80
6.1. Dependencia en las colas para W , Π y M	152
7.1. Ajuste de las 22 cópulas Arquimedianas de Nelsen.	175
7.2. Estadísticos descriptivos para el SO_2 y la dirección del viento.	191
7.3. Estadísticos descriptivos de la velocidad del viento en las cinco estaciones.	194
7.4. Parámetros para las mezclas de von Mises y distribuciones de STNN.	198
8.1. Cópulas no Arquimedianas 1A.	204
8.2. Cópulas no Arquimedianas 1B.	205
8.3. Cópulas no Arquimedianas 2A.	206
8.4. Cópulas no Arquimedianas 2B.	207
8.5. Cópulas no Arquimedianas 3A.	208
8.6. Cópulas no Arquimedianas 3B.	209
8.7. Cópulas Arquimedianas 1A.	210
8.8. Cópulas Arquimedianas 1B.	211
8.9. Cópulas Arquimedianas 2A.	212
8.10. Cópulas Arquimedianas 2B.	213
8.11. Cópulas Arquimedianas 3A.	214
8.12. Cópulas Arquimedianas 3B.	215
8.13. Cópulas Arquimedianas 4A.	216
8.14. Cópulas Arquimedianas 4B.	217
A.1. Grupo dihédrico Dih_2 para \wedge , \sim y $*$	230

Introducción

Esta tesina para la obtención del Grado de Licenciado en Matemáticas revisa la teoría, propiedades y aplicaciones de las funciones cópula. La exposición teórica tiene el punto de partida en el Teorema de Sklar y, entre otros conceptos, aborda la construcción de cópulas, la importante clase Arquimediana y la relación de las cópulas con las medidas de dependencia. Entre las aplicaciones, destaca el estudio de datos direccionales procedentes de la central térmica de As Pontes y una ilustración del método de Genest y Rivest para la estimación de cópulas Arquimedianas.

Las funciones cópula son distribuciones multivariantes con marginales uniformes, que, aplicadas adecuadamente, permiten expresar una función de distribución multivariante a partir de sus marginales. Este es un tema de gran interés tanto a nivel teórico como práctico. En primer lugar, este planteamiento permite una reformulación del estudio de las variables aleatorias, pasando de estudiar la distribución conjunta a estudiar de forma separada la cópula y las marginales. Así, la cópula representa la estructura de dependencia entre las variables y, como consecuencia, muchos de los conceptos de dependencia se pueden expresar en términos de cópulas. Además, la separación de una distribución en cópula y marginales traslada el estudio de la dependencia en variables aleatorias al estudio en variables uniformes, aislando los efectos de las marginales. Esta separación abre una nueva vía en la estimación de distribuciones conjuntas, permitiendo estimar de forma separada la dependencia, dada por la cópula, y las marginales. Por otro lado, las cópulas se pueden usar para construir nuevas familias de distribuciones multidimensionales y simularlas de forma sencilla.

En lo que respecta a las aplicaciones, las cópulas se usan en finanzas para el modelado de datos multivariantes, el análisis de riesgo de activos (por ejemplo CDOs) y el análisis de productos actuariales. También se usan en medio ambiente, en el análisis supervivencia y, de forma más novedosa, en el estudio de datos direccionales. Dentro de la estadística, las cópulas tienen importantes usos en, por ejemplo, la regresión cuantil y la regresión cuando la variable regresora no es independiente del error.

El estudio de las cópulas y de sus aplicaciones en estadística es un fenómeno relativamen-

te nuevo, aunque con un crecimiento vertiginoso en los últimos veinte años. Su historia comienza en 1959 cuando Abe Sklar publica el artículo *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges* en las publicaciones del Instituto de Estadística de la Universidad de París. En él, Sklar emplea por primera vez el término *cópula* (juntar, unir) y proporciona el famoso teorema que lleva su nombre. En 1973, Sklar publicó en la revista *Kybernetika* el artículo *Random variables, joint distribution functions, and copulas* en el que recogía los resultados sobre cópulas y que obtuvo una mayor difusión, al estar escrito en inglés. Conviene mencionar que trabajos basados en distribuciones con marginales uniformes fueron llevados a cabo antes por Hoeffding (1940), quien estableció las propiedades básicas de una cópula, así como las cotas de Fréchet–Hoeffding. Sin embargo, debido a que sus publicaciones estaban en alemán y en revistas poco conocidas, sus trabajos permanecieron olvidados hasta que fueron traducidos al inglés en 1994. Fréchet (1951) descubrió de forma independiente muchos de los resultados de Hoeffding. En vista de la aportación de ambos autores, se acuñaron los términos de “cotas de Fréchet–Hoeffding” y “clases de Fréchet–Hoeffding”.

Exceptuando los Capítulos 5 y 7, el contenido de la tesina tiene un marcado carácter teórico. Por eso se realizan la mayoría de las demostraciones, citando referencias bibliográficas para las que, por ser demasiado largas o intrascendentes, no sean demostradas. Para dar fluidez e ir ilustrando los diversos conceptos, se incluyen numerosos ejemplos, gráficas y observaciones. En este trabajo nos centraremos en las cópulas bidimensionales, sin olvidar las multidimensionales, que también tienen un capítulo y varias secciones específicas.

En el **Capítulo 1** se estudian las cópulas bidimensionales (en adelante cópulas simplemente). Se presentan como una extensión de las subcópulas, se prueba el Teorema de Sklar y se exploran sus propiedades. Las más destacables son la relación de las cotas de Fréchet–Hoeffding con los conceptos de dependencia perfecta y la invarianza de las cópulas por transformaciones crecientes. Otros temas importantes que se examinan son las componentes de una cópula, el orden en el conjunto de las cópulas, la simetría y las cópulas de supervivencia. Los resultados obtenidos para cópulas se extienden para cópulas multidimensionales en el **Capítulo 2**. Ciertos conceptos tienen una extensión sencilla, como el Teorema de Sklar multidimensional, las componentes o las cotas de Fréchet–Hoeffding. Otros, en cambio, se complican, como es el caso del orden y de las cópulas multivariantes de supervivencia. Las demostraciones y complementos teóricos que sean necesarios para estos capítulos y los siguientes se recogen en el **Apéndice A**.

La construcción de cópulas es uno de los temas más relevantes. A lo largo del **Capítulo 3** se presentan los métodos geométricos, algebraicos y de inversión para la construcción

de cópulas. Un método geométrico muy interesante es la mezcla de potencias, que lleva a las cópulas Arquimedianas usando las transformadas de Laplace. El capítulo finaliza con la problemática de la construcción de cópulas multivariantes.

Las cópulas Arquimedianas son una amplia clase de cópulas muy interesante debido a sus buenas propiedades. El **Capítulo 4** establece las condiciones necesarias para obtener estas cópulas y algunas de sus propiedades y caracterizaciones. Se estudian también las cópulas Arquimedianas multivariantes, que proporcionan una forma elegante y sencilla de construir cópulas multivariantes.

En el **Capítulo 5** se recogen los distintos métodos para simular cópulas. Son especialmente interesantes porque el proceso de simular una distribución multivariante se puede dividir en la simulación de la cópula y la simulación de las marginales unidimensionales. Los algoritmos para los ejemplos del capítulo están programados en **R** y sus códigos se pueden ver en el **Apéndice B**. El capítulo se cierra incluyendo algunos ejemplos de uso del paquete `fCopulae`.

Como las cópulas miden la dependencia entre dos variables, a través de ellas se pueden expresar los distintos tipos y medidas de dependencia. A este tema está dedicado el **Capítulo 6**, en el que destacan las medidas de concordancia y de dependencia (según la definición de Rényi de 1959).

El **Capítulo 7** recoge algunas aplicaciones de las cópulas. La principal será el estudio de los datos direccionales procedentes de la central térmica de As Pontes, correspondientes a la dirección del viento y la concentración de SO_2 durante el mes de agosto de 2009. También se ve una forma alternativa de plantear y estimar la regresión cuantil mediante cópulas y una aplicación del método de Genest y Rivest para el ajuste de la cópula de un conjunto de datos conocido en la literatura. Los códigos de **R** usados en este capítulo, salvo los de datos direccionales, que no se incluyen por ser demasiado extensos, están en el **Apéndice C**.

Por último, el **Capítulo 8** contiene una colección de cópulas notables aparecidas en la literatura sobre cópulas, acompañadas por parámetros de interés como la Tau de Kendall o la Rho de Spearman. Muchas de las expresiones analíticas se han calculado usando el software simbólico `Mathematica`.

Capítulo 1

Cóputas bivariantes y propiedades básicas

A lo largo de este capítulo se introduce el concepto de cópula bivalente, dejando su extensión multivalente para el próximo capítulo. Se enuncia la relación de las cópulas con las distribuciones bivariantes y se ven las propiedades que hacen de las cópulas una poderosa herramienta para modelar la dependencia de una forma estandarizada. El punto clave es el Teorema de Sklar, enunciado en 1959 y precursor de la teoría.

1.1. Preliminares

Antes de introducir el concepto de función cópula, se recuerdan algunos conceptos y resultados relacionados con el estudio de las funciones de distribución. Estos resultados abordan la extensión del concepto de función creciente univalente al caso multivalente.

Definición 1.1. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, y sea H una función de dos variables reales tal que su dominio es $S_1 \times S_2$. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo tal que $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \text{Dom}H$. Entonces se define el H -volumen de B como

$$V_H(B) := H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (1.1)$$

Observación 1.1. Notemos que si definimos las diferencias de primer orden de H en el rectángulo B como

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) := H(x_2, y) - H(x_1, y) \text{ y } \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) := H(x, y_2) - H(x, y_1), \quad (1.2)$$

entonces el H -volumen del rectángulo B es la diferencia de segundo orden de H en B ,

$$V_H(B) = \Delta_{x_1}^{x_2} \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y). \quad (1.3)$$

Esta interpretación nos da una posible generalización del concepto de función creciente para funciones de n variables, tomando las diferencias de orden n -ésimo para medir el crecimiento de la función respecto a dos puntos. \triangleleft

Definición 1.2. Una función de dos variables reales H es 2 -creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todos los rectángulos B cuyos vértices estén en $\text{Dom}H$.

Esta extensión tiene algunas peculiaridades y no guarda relación alguna (no implica ni es implicada) con el concepto de *función no decreciente*¹ en cada uno de sus argumentos. Esto se puede ver con los siguientes contraejemplos.

Ejemplo 1.1. Sea H la función definida en \mathbb{I}^2 por $H(x, y) = \max(x, y)$. Entonces H es una función no decreciente en cada argumento, pero como $V_H(\mathbb{I}^2) = H(1, 1) - H(1, 0) - H(0, 1) + H(0, 0) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1$, H no es 2 -creciente. \diamond

Ejemplo 1.2. Sea H la función definida en \mathbb{I}^2 por $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$. H es 2 -creciente ya que si tomamos $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \in \mathbb{I}^2$,

$$\begin{aligned} V_H(B) &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_2 - 1)(2y_1 - 1) \\ &\quad - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1) + (2x_1 - 1)(2y_1 - 1) \\ &= 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, H es una función decreciente en x si fijamos $y \in (0, \frac{1}{2})$ y decreciente en y si fijamos $x \in (0, \frac{1}{2})$, con lo que no es no decreciente en ningún argumento. \diamond

Los siguientes lemas serán muy útiles en la próxima sección. En concreto, el Lema 1.2 muestra que bajo hipótesis extras, 2 -creciente implica *no decreciente en cada argumento*.

Lema 1.1. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función 2 -creciente con dominio $S_1 \times S_2$. Sean $x_1, x_2 \in S_1$ con $x_1 \leq x_2$ e $y_1, y_2 \in S_2$ con $y_1 \leq y_2$. Entonces la función $t \in S_1 \mapsto \varphi_1(t) := H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es no decreciente en S_1 , y la función $t \in S_1 \mapsto \varphi_2(t) := H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es no decreciente en S_2 .

Demostración. Se comprueba sólo para φ_1 , por ser análogo para φ_2 .

Hay que ver que φ_1 es no decreciente, es decir,

$$\forall t_1, t_2 \in S_1 : t_1 \leq t_2 \Rightarrow \varphi_1(t_1) \leq \varphi_1(t_2) \Leftrightarrow \varphi_1(t_2) - \varphi_1(t_1) \geq 0.$$

¹Función creciente sin serlo en el sentido estricto.

Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_2) - \varphi_1(t_1) &= H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - (H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1)) \\ &= H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - H(t_1, y_2) + H(t_1, y_1) \\ &\stackrel{\text{Def. 1.1}}{=} V_H([t_1, t_2] \times [y_1, y_2]) \stackrel{H \text{ 2-creciente}}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Con lo que φ_1 es no decreciente. □

La siguiente definición permite asegurar que una función 2-creciente sea no decreciente en cada argumento e introduce uno de los requisitos que ha de cumplir una cópula.

Definición 1.3. Si $S_1, S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$ son no vacíos, diremos que la función $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *grounded*² si, tomando $a_1 = \inf S_1$, $a_2 = \inf S_2$, se verifica

$$H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in S_1 \times S_2. \tag{1.4}$$

Definición 1.4. Dada la función $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $S_1, S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$, se definen las *marginales de H*, como las funciones F y G dadas por:

$$\begin{aligned} F(x) &= H(x, b_2), \quad \forall x \in \text{Dom}F = S_1, \text{ con } b_1 = \sup S_1 \text{ y} \\ G(y) &= H(b_1, y), \quad \forall y \in \text{Dom}G = S_2, \text{ con } b_2 = \sup S_2. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo ilustra las definiciones anteriores.

Ejemplo 1.3. Sea la función H con dominio $\text{Dom}H = [-1, 1] \times [0, \infty]$ y definida por

$$H(x, y) = \frac{(x + 1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}.$$

Los supremos e ínfimos son $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ y $b_1 = 1$, $b_2 = \infty$. H es grounded porque $H(x, 0) = 0 = H(-1, y)$ y las marginales de H son $F(x) = H(x, \infty) = \frac{x+1}{2}$ y $G(y) = H(1, y) = 1 - e^{-y}$. En la Figura 1.1 se puede ver el carácter grounded de la función, ya que se anula en los puntos de la frontera de $S_1 \times S_2$ que tienen alguna componente ínfima. Por otro lado, la marginal F se corresponde al corte con el plano paralelo a OXZ que pasa por b_2 y la G al del plano paralelo a OYZ que pasa por b_1 . ◇

Lema 1.2. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y H una función 2-creciente *grounded* con dominio $S_1 \times S_2$. Entonces H es no decreciente en cada argumento.

²Literalmente “que toca el suelo”, es decir, que se anula en ciertos puntos. No hay una traducción al castellano aceptada.

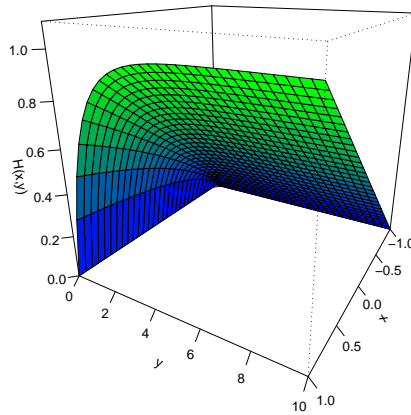


Figura 1.1: Gráfica de la función $H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}$.

Demostración. Si denotamos por $a_1 = \inf S_1$ y $a_2 = \inf S_2$, podemos aplicar el Lema 1.1 con $x_1 = a_1$ y $y_1 = a_2$. Al ser H grounded se verifica (1.4), con lo cual $\varphi_1(t) = H(t, y_2)$ y $\varphi_2(t) = H(x_2, t)$. Entonces, por el Lema 1.2, H es no decreciente en cada argumento. \square

Lema 1.3. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función grounded, 2-creciente, con marginales F y G y con dominio $S_1 \times S_2$. Entonces $\forall x_1, x_2 \in S_1$ y $\forall y_1, y_2 \in S_2$,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|. \tag{1.5}$$

Demostración. Aplicando la desigualdad triangular, $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|$. Como estamos en las hipótesis de los Lemas 1.1 y 1.2 podemos aplicar sus resultados: φ_1 y φ_2 son no decrecientes y H es no decreciente en sus argumentos.

Supongamos que $x_1 \leq x_2$. Entonces

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) = \varphi_2(y_2) \leq \varphi_2(b_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{1.6}$$

Análogamente, si $x_1 \geq x_2$,

$$0 \geq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) = -\varphi_2(y_2) \geq -\varphi_2(b_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{1.7}$$

Con lo cual, $\forall x_1, x_2 \in S_1$, $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$.

Razonando de una manera análoga, con y_1 e y_2 , tenemos que $\forall y_1, y_2 \in S_2$, $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|$. La demostración se acaba acotando la desigualdad triangular con las desigualdades (1.6) y (1.7). \square

1.2. Cópulas

Se comienza introduciendo el concepto de *subcópula*, más general que el de *cópula* y necesario para probar el Teorema de Sklar.

Definición 1.5. Una *subcópula bidimensional* (o *2-subcópula*, o **subcópula** simplemente) es una función C' que verifica:

- I. $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2$, con $S_1, S_2 \subset \mathbb{I} = [0, 1]$ conteniendo a 0 y 1.
- II. C' es grounded y 2-creciente.
- III. $\forall u \in S_1, \forall v \in S_2, C'(u, 1) = u$ y $C'(1, v) = v$.

Observación 1.2. Notemos que C' es no decreciente en cada componente por el Lema 1.2, lo que nos lleva a que el máximo se alcanza en (1,1) y el mínimo en (0,0). Como $C'(1, 1) \stackrel{I}{=} 1$ y $C(0, 0) \stackrel{C' \text{ grounded}}{=} 0$, se tiene que $\forall (u, v) \in \text{Dom}C', 0 \leq C'(u, v) \leq 1$, así que $\text{Ran}C'$ es también un subconjunto de \mathbb{I} . \triangleleft

Definición 1.6. Una *cópula bidimensional* (o *2-cópula*, o **cópula** simplemente) es una 2-subcópula C cuyo dominio es \mathbb{I} .

La anterior definición pone de manifiesto la mayor generalidad de las subcópulas, aunque a efectos de claridad sea más conveniente usar siguiente definición.

Definición 1.7. Una *cópula* es una función $C : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ que verifica las siguientes propiedades:

- I. $\forall u, v \in \mathbb{I}, C(u, 0) = 0 = C(0, v)$.
- II. $\forall u, v \in \mathbb{I}, C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v$.
- III. (C es 2-creciente) $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Observación 1.3. Una **cópula es una función de distribución bidimensional con soporte (restringida) en $\mathbb{I}^2 = [0, 1]^2$ que tiene marginales uniformes $\mathcal{U}(0, 1)$** . Las marginales uniformes se deducen de la propiedad II, mientras que I indica la nula probabilidad acumulada en 0 y III asegura que sea 2-creciente. \triangleleft

Ejemplo 1.4. Sea $\theta \in [-1, 1]$. Las cópulas dadas por

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)} \quad (1.8)$$

constituyen la familia de cópulas de Ali-Mikhail-Haq. \diamond

Ejemplo 1.5. Sea $\theta \in [0, 1]$ y

$$C_\theta(u, v) = [\min(u, v)]^\theta [uv]^{1-\theta} = \begin{cases} uv^{1-\theta}, & u \leq v \\ u^{1-\theta}v, & u \geq v \end{cases} . \tag{1.9}$$

Estas cópulas constituyen *La familia de cópulas de Cuadras–Augé*. ◇

Probar que las cópulas de estos ejemplos son en efecto cópulas requiere de largos cálculos para la propiedad III (las propiedades I y II son triviales). En la Figura 1.2 se puede ver las gráficas de estos ejemplos, con la estructura característica de todas las cópulas.

A continuación se muestran una serie de resultados con propiedades de las cópulas y subcópulas. Los dos primeros resultados son especialmente importantes, pues proporcionan la cota inferior y superior para una cópula o subcópula.

Teorema 1.1. *Sea C' una subcópula. Entonces, $\forall(u, v) \in \text{Dom}C' \subset \mathbb{I}^2$,*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v). \tag{1.10}$$

Demostración. Sea $(u, v) \in \text{Dom}C'$ arbitrario.

Por el Lema 1.2, sabemos que C' es no decreciente en cada argumento, con lo que $C'(u, v) \leq C'(u, 1) \stackrel{\text{II}}{=} u$ y $C'(u, v) \geq C'(1, v) \stackrel{\text{II}}{=} v$. Por lo tanto $C'(u, v) \leq \min(u, v)$.

Además, como C' es 2-creciente y el rectángulo $[u, 1] \times [v, 1]$ tiene sus vértices en $\text{Dom}C' \subset \mathbb{I}^2$, su C' -volumen es no negativo. Por lo tanto, $0 \leq V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) = C'(1, 1) - C'(1, u) - C'(v, 1) + C'(u, v) \stackrel{\text{II}}{=} 1 - u - v + C'(u, v)$ y así $C'(u, v) \geq u + v - 1$.

Combinando esta última expresión con $C'(u, v) \geq 0$ se tiene que $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$. □

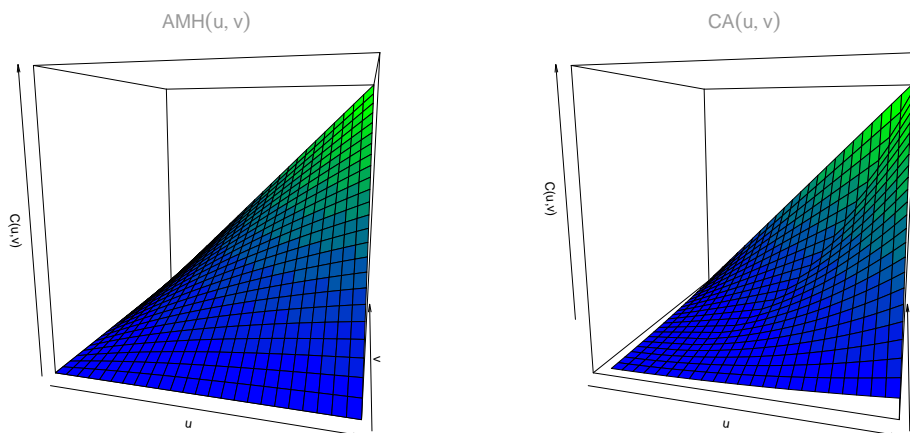


Figura 1.2: Cópulas de *Ali–Mikhail–Haq* y *Cuadras–Augé* para $\theta = \frac{1}{2}$ y $\theta = -1$.

Teorema 1.2 (Desigualdad de Fréchet–Hoeffding). *Las cotas de (1.10) son cópulas. Se denotan por $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ y $M(u, v) = \min(u, v)$ y se denominan la cota inferior y superior de Fréchet–Hoeffding, respectivamente. Entonces, para toda cópula C se tiene:*

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \tag{1.11}$$

A esta desigualdad se la conoce como la **desigualdad de Fréchet–Hoeffding**.

Demostración. Simplemente hay que probar que W y M son cópulas, pues el resto se deduce del teorema anterior. Para la cota inferior W :

- I. $\forall u, v \in \mathbb{I}, W(u, 0) = \max(u - 1, 0) = 0$ y $W(0, v) = \max(v - 1, 0) = 0$.
- II. $\forall u, v \in \mathbb{I}, W(u, 1) = \max(u, 0) = u$ y $W(1, v) = \max(v, 0) = v$.
- III. $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$,

$$\begin{aligned} V_W(B) &= W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) \\ &= \max(u_2 + v_2 - 1, 0) + \max(u_2 + v_1) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= \max(u_2 + v_2 - 1, u_1 + v_1 - 1, u_2 + v_2 + u_1 + v_1 - 2, 0) \\ &\quad - \max(u_2 + v_1 - 1, u_1 + v_2 - 1, u_2 + v_2 + u_1 + v_1 - 2, 0). \end{aligned}$$

Analizando los posibles casos, suponiendo que $u_2 + v_2 - 1, u_2 + v_2 + u_1 + v_1 - 2$ o 0 es el máximo en el primer sumando se puede comprobar que es mayor que cualquier máximo del segundo sumando y por tanto se cumple la tercera propiedad.

Para la cota superior M :

- I. $\forall u, v \in \mathbb{I}, M(u, 0) = \min(u, 0) = 0$ y $M(0, v) = \min(0, v) = 0$.
- II. $\forall u, v \in \mathbb{I}, M(u, 1) = \min(u, 1) = u$ y $M(1, v) = \min(v, 1) = v$.
- III. $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$,

$$\begin{aligned} V_M(B) &= M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) \\ &= \begin{cases} u_2 - u_2 - u_1 + u_1, & u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2 \\ u_2 - v_1 - u_1 + u_1, & u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 \\ v_2 - v_1 - u_1 + v_1, & v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2 \\ v_2 - v_1 - v_2 + v_1, & v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2 \end{cases} \geq 0. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema garantiza la continuidad uniforme de las cópulas mediante una condición de Lipschitz.

Teorema 1.3. *Sea C' una subcópula. Entonces C' cumple la condición de Lipschitz*

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|, \quad \forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \text{Dom}C'. \quad (1.12)$$

Es decir, C' es uniformemente continua en su dominio.

Demostración. Como C' es una subcópula, es grounded y 2-creciente. Además, por III, las marginales de C' son:

$$F(u) = C'(u, 1) = u, \quad \forall u \in S_1 \text{ y } G(v) = C'(1, v) = v, \quad \forall v \in S_2. \quad (1.13)$$

Aplicando el Lema 1.3 se prueba el resultado. Además C' es uniformemente continua en su dominio ya que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $d_1((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_1 = |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| < \delta$ implica $|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| < \delta = \varepsilon$. Como $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, C' es uniformemente continua con la métrica euclídea usual. □

Observación 1.4. Las cotas de Fréchet–Hoeffding, el Teorema 1.2 y la propia definición de cópula caracterizan la **gráfica de las cópulas** claramente: **una superficie regular dentro del cubo \mathbb{I}^3 que pasa por los vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$ y que está comprendida entre las gráficas de M y W .** ◁

Una cópula que también merece especial atención es la *cópula producto*, $\Pi(u, v) = uv$. En la Figura 1.3 podemos ver las gráficas de W , M y Π . A estas cópulas también se las suele denotar por C^- , C^\perp y C^+ .

Una forma mejor de representar gráficamente las cópulas es hacer uso de los conjuntos de nivel de la gráfica (diagramas de contorno). Un detalle importante es que no se necesita etiquetar los conjuntos de nivel porque las condiciones de contorno $C(1, t) = t = C(t, 1)$ ya nos indican la constante para cada conjunto de nivel. En la Figura 1.3 se presentan las gráficas y los conjuntos de nivel para las cópulas M , W y Π .

Definición 1.8. Sea C una cópula, y sea a un número cualquiera de \mathbb{I} . Se definen:

- I. La *sección horizontal de C en a* como la función $t \in \mathbb{I} \mapsto h_a(t) := C(t, a) \in \mathbb{I}$.
- II. La *sección vertical de C en a* como la función $t \in \mathbb{I} \mapsto v_a(t) := C(a, t) \in \mathbb{I}$.
- III. La *sección diagonal de C* como la función $t \in \mathbb{I} \mapsto \delta_C(t) := C(t, t) \in \mathbb{I}$.

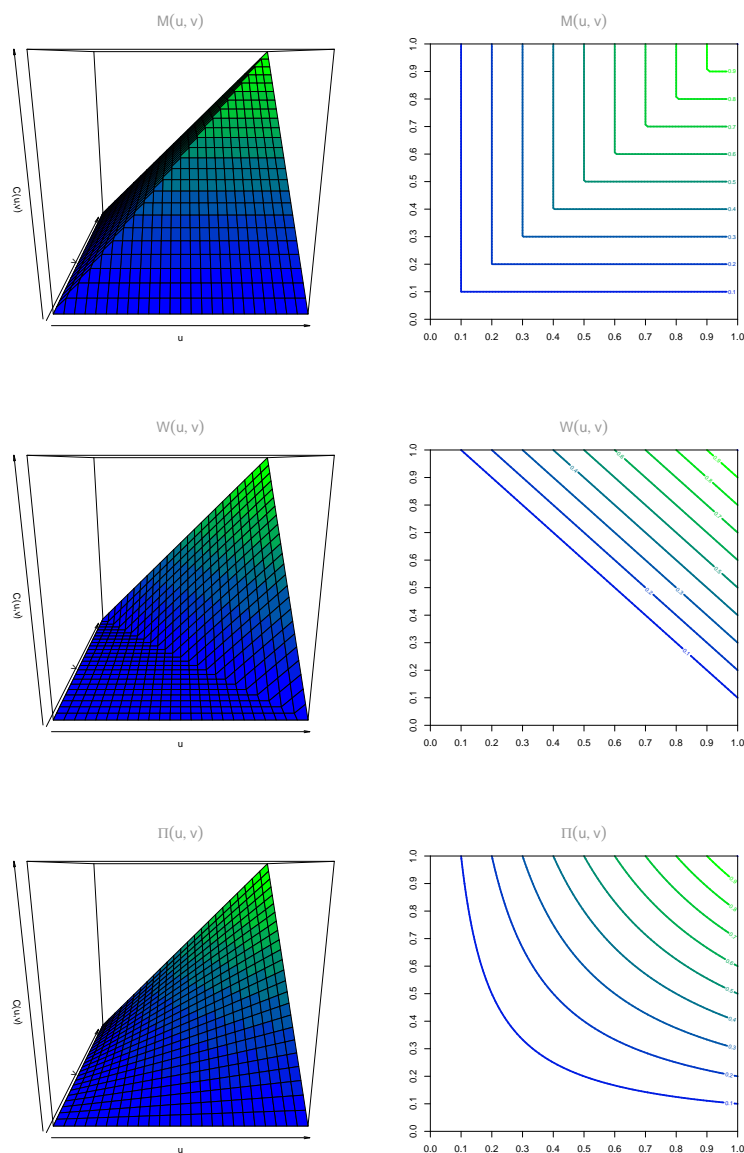


Figura 1.3: Gráficas y conjuntos de nivel de las cotas de Fréchet–Hoeffding y de la cópula producto.

Corolario 1.1. *Las secciones horizontales, verticales y diagonales de una cópula C son todas funciones no decrecientes y uniformemente continuas en \mathbb{I} .*

Demostración. Basta aplicar el Lema 1.2 para ver que son no decrecientes y el Teorema 1.2 para la continuidad uniforme. □

Teorema 1.4. *Sea C una cópula. Para todo $v \in \mathbb{I}$, la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial u}C(u, v)$ existe para casi todo $u \in \mathbb{I}$, y donde existe se cumple:*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u}C(u, v) \leq 1. \tag{1.14}$$

De manera análoga, para todo $u \in \mathbb{I}$, la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial v}C(u, v)$ existe para casi todo $v \in \mathbb{I}$, y donde existe se cumple:

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v}C(u, v) \leq 1. \tag{1.15}$$

Además, las funciones $u \in \mathbb{I} \mapsto \frac{\partial}{\partial v}C(u, v)$ y $v \in \mathbb{I} \mapsto \frac{\partial}{\partial u}C(u, v)$ están definidas y son no decrecientes en casi todo \mathbb{I} .

Demostración. Las derivadas parciales se pueden escribir en función de las secciones verticales y horizontales: $u \in \mathbb{I} \mapsto \frac{\partial}{\partial v}C(u, v) = \frac{\partial}{\partial v}h_u(v)$ y $v \in \mathbb{I} \mapsto \frac{\partial}{\partial u}C(u, v) = \frac{\partial}{\partial u}v_v(u)$. Por el Corolario 1.1 se sabe que las secciones horizontales y verticales de una cópula son no decrecientes. Usando que las funciones monótonas no decrecientes definidas en un intervalo son diferenciables en casi todo punto, ya se puede asegurar la existencia.

Comprobamos la desigualdad (1.14), al ser (1.15) análoga:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{v_v \text{ no dec.}}{\leq} \frac{\partial}{\partial u}C(u, v) = \lim_{x \rightarrow v} \frac{C(u, v) - C(u, x)}{v - x} = \lim_{x \rightarrow v} \frac{|C(u, v) - C(u, x)|}{|v - x|} \\ &\stackrel{\text{Teorema 1.2}}{\leq} \lim_{x \rightarrow v} \frac{|u - u| + |v - x|}{|v - x|} = 1. \end{aligned}$$

Parea ver que las derivadas parciales son no decrecientes, tomamos $v_1 \leq v_2$ y aplicamos el Lema 1.1 para deducir que $u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ es no decreciente en todo \mathbb{I} . Por lo tanto, $u \mapsto \frac{\partial(C(u, v_2) - C(u, v_1))}{\partial u}$ está definida en c.t.p. de \mathbb{I} y es no negativa. Como hemos visto que para casi todos $v_1 \leq v_2 \Rightarrow \frac{\partial C(u, v_1)}{\partial u} \leq \frac{\partial C(u, v_2)}{\partial u}$, se sigue que $v \mapsto \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ está definida y es no decreciente en \mathbb{I} . Análogamente se probaría para $u \mapsto \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$. \square

Teorema 1.5. *Sea C una cópula. Si $\frac{\partial}{\partial v}C(u, v)$ y $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u, v)$ son continuas en \mathbb{I}^2 y $\frac{\partial}{\partial u}C(u, v)$ existe para todo u en $(0, 1)$ cuando $v = 0$, entonces $\frac{\partial}{\partial u}C(u, v)$ y $\frac{\partial^2}{\partial v \partial u}C(u, v)$ existen en $(0, 1)^2$ y $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u}C(u, v)$.*

Demostración. Ver [74]. \square

Ejemplo 1.6. Una familia de cópulas que incluya a M , W y Π se dice *comprehensiva*. La familia de *Cuadras–Augé* no es comprensiva, aunque $C_0 = \Pi$ y $C_1 = M$. Una familia de cópulas que sí es comprensiva es la *familia de Mardia*, que está indexada por el parámetro $\theta \in [-1, 1]$:

$$C_\theta(u, v) = \frac{\theta^2(1 + \theta)}{2}M(u, v) + (1 - \theta^2)\Pi(u, v) + \frac{\theta^2(1 - \theta)}{2}W(u, v). \tag{1.16}$$

Es comprensiva ya que $C_0 = \Pi$, $C_{-1} = W$ y $C_1 = M$. \diamond

Un detalle importante es que, de acuerdo con la desigualdad de Fréchet–Hoeffding, los conjuntos de nivel de cualquier cópula deben estar contenidos entre los de la cota inferior

y la superior, que corresponde a una región triangular. En la Figura 1.4 se pueden ver los conjuntos de nivel 0.1 para varias cópulas de la familia de Mardia. Es interesante usar esta familia porque es comprehensiva y así se puede ver como varía de la cota inferior a la superior.

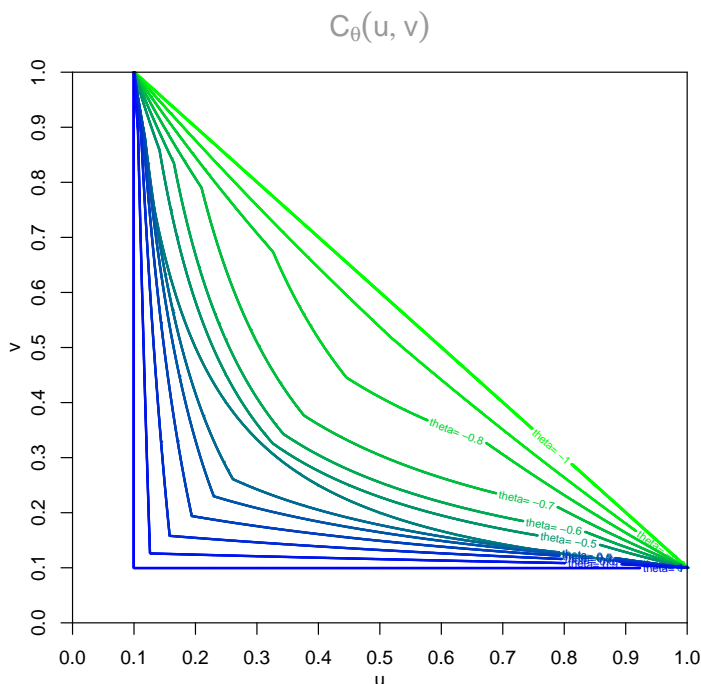


Figura 1.4: Conjuntos de nivel 0.1 para diferentes cópulas de la familia de Mardia.

1.3. Teorema de Sklar

En esta sección presentamos el resultado más importante relacionado con las cópulas, que además dio origen a esta teoría.

Definición 1.9. Una *función de distribución* es una función F con dominio $\overline{\mathbb{R}}$ tal que:

- I. F es no decreciente.
- II. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.
- III. F es continua por la derecha.

Definición 1.10. Una *función de distribución conjunta (bivariante)* es una función H con dominio $\overline{\mathbb{R}}^2$ tal que:

- I. H es 2-creciente.

- II. H es continua por la derecha en cada variable.
- III. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ y $H(\infty, \infty) = 1$.

Teorema 1.6 (Teorema de Sklar). *Sea H una función de distribución conjunta con distribuciones marginales F y G . Entonces existe una cópula C tal que*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{1.17}$$

Si F y G son continuas, entonces C es única. En otro caso, C está unívocamente determinada en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

Recíprocamente, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida por (1.17) es una función de distribución conjunta con distribuciones marginales F y G .

Para demostrar el teorema se usan dos lemas: el primero prueba el resultado para subcópulas y el segundo, más complicado, garantiza la extensión de una subcópula a una cópula, extensión que generalmente no es única.

Lema 1.4. *Sea H una distribución conjunta con distribuciones marginales F y G . Entonces existe una **única subcópula** C' tal que:*

- I. $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$.
- II. $H(x, y) = C'(F(x), G(y)), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Demostración. La distribución conjunta H satisface las hipótesis del Lema 1.3 con $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$, por lo que se verifica (1.5).

El conjunto $\{(F(x), G(y)), H(x, y) : x, y \in \overline{\mathbb{R}}\} \subset \text{Ran}F \times \text{Ran}G \times \mathbb{I}$ define implícitamente una **única** función bivalente

$$\begin{aligned} C' : \text{Ran}F \times \text{Ran}G &\longrightarrow \mathbb{I} \\ (F(x), G(y)) &\longmapsto H(x, y) \end{aligned}$$

C' es en efecto una aplicación ya que si $F(x_1) = F(x_2)$ y $G(y_1) = G(y_2)$, entonces por (1.5), $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Queda ver si C' es una subcópula:

- I. $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$ por definición y $\text{Ran}F, \text{Ran}G \subset \mathbb{I}$, conteniendo a 0 y 1 por la Definición 1.9.
- II. **C' es grounded**
 $\forall u \in \text{Ran}F, \exists x : u = F(x)$, por lo que $C'(u, 0) = C'(F(x), G(-\infty)) = H(x, -\infty) = 0$. De forma análoga se procede con la segunda componente.
 C' es 2-creciente

Sean $u_1 \leq u_2 \in \text{Ran}F$ y $v_1 \leq v_2 \in \text{Ran}G$. Sus imágenes inversas por F y G verifican $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ por ser F y G no decrecientes. Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta_{u_1}^{u_2} \Delta_{v_1}^{v_2} C(u, v) &= C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_2) - C'(u_2, v_1) + C'(u_1, v_1) \\ &= C'(F(x_2), G(y_2)) - C'(F(x_1), G(y_2)) \\ &\quad - C'(F(x_2), G(y_1)) + C'(F(x_1), G(y_1)) \\ &= H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \stackrel{H \text{ 2-creciente}}{\geq} 0. \end{aligned}$$

III. $\forall u \in \text{Ran}F, \exists x : u = F(x)$, así que $C'(u, 1) = C'(F(x), G(+\infty)) = H(x, +\infty) = F(x) = u$. Para la segunda variable es análogo.

□

Lema 1.5 (Extensión de una subcópula a una cópula). *Sea C' una subcópula. Entonces existe una cópula C tal que*

$$C(u, v) = C'(u, v), \quad \forall (u, v) \in \text{Dom}C'. \tag{1.18}$$

Es decir, toda subcópula puede ser extendida a una cópula. La extensión no es única generalmente.

Demostración. La demostración, un tanto complicada, se puede ver en el Apéndice A. □

Ejemplo 1.7. Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos la función de distribución

$$H(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq a \text{ y } y \geq b \\ 0, & x < a \text{ o } y < b \end{cases}.$$

H tiene toda la probabilidad concentrada en el átomo (a, b) . Las marginales de H son ε_a y ε_b , donde $\varepsilon_a(x) = H(x, +\infty) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$ es la *función de escalón unitario en a* .

Aplicando el Lema 1.4 a H tenemos la subcópula C' definida en $\text{Ran}\varepsilon_a \times \text{Ran}\varepsilon_b = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ con valores $C'(0, 0) = C'(1, 0) = C'(0, 1) = 0$ y $C'(1, 1) = 1$. Estos cuatro puntos son por los que toda cópula debe pasar.

La extensión de C' a una cópula según la construcción que se hace en la demostración del Lema 1.5 es la cópula producto $C = \Pi$. ◇

Con los Lemas 1.4 y 1.5 probados, es sencillo demostrar el Teorema de Sklar.

Teorema de Sklar. La existencia de una cópula C tal que (1.17) se sigue de los Lemas 1.4 (existencia de subcópula) y 1.5 (extensión de la subcópula a cópula). Si F y G son continuas, entonces $\text{Ran}F = \text{Ran}G = \mathbb{I}$, así que la única subcópula en el Lema 1.4 es en

realidad una cópula.

Probar el recíproco es sencillo, comprobando que se verifican las propiedades de la Definición 1.10.

- I. Al ser F y G distribuciones se garantiza que $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ y que $y_1 \leq y_2 \Rightarrow G(y_1) \leq G(y_2)$, por lo que se puede aplicar que C es 2-creciente y concluir que H también lo es.
- II. H es continua por la derecha en cada componente porque F y G lo son y C es uniformemente continua en virtud del Teorema 1.3.
- III. $H(x, -\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0 = C(0, G(y)) = C(F(-\infty), G(y)) = H(-\infty, 0)$ y $H(+\infty, +\infty) = C(1, 1) = 1$.

Las marginales de H son F y G por la propiedad II de la definición de cópula. □

Definición 1.11. Sea F una función de distribución. Una *quasi-inversa* de F es cualquier función $F^{(-1)}$ con dominio \mathbb{I} tal que:

- I. Si $t \in \text{Ran}F$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es cualquier número x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$. Es decir, se cumple

$$F(F^{(-1)}(t)) = t, \quad \forall t \in \text{Ran}F.$$

- II. Si $t \notin \text{Ran}F$, entonces

$$F^{(-1)}(t) := \inf \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(x) \geq t\} = \sup \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(x) \leq t\}. \tag{1.19}$$

Normalmente, se suele definir la *quasi-inversa* de F englobando el caso I en (1.19), fijando el número $x \in \overline{\mathbb{R}}$ como el máximo posible. Esta es la forma en que se define la *función cuantil* o *inversa generalizada*. Salvo mención explícita, cuando denotemos $F^{(-1)}$ nos referiremos a la inversa generalizada definida por (1.19).

Si F es estrictamente creciente, entonces tiene una única *quasi-inversa*, que es la función inversa habitual, para la que usamos la notación F^{-1} .

El siguiente corolario muestra el importante papel que desempeñan las funciones *quasi-inversas*.

Corolario 1.2. Sea H una distribución conjunta con distribuciones marginales F y G , C' la cópula derivada del Lema 1.4 y $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ las *quasi-inversas* de F y de G respectivamente. Entonces

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)), \quad \forall (u, v) \in \text{Dom}C'. \tag{1.20}$$

Demostración. Por el Lema 1.4, $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$ y $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$, $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces, para cualquier (u, v) en $\text{Dom}C'$, definamos $x := F^{(-1)}(u)$ y $y := G^{(-1)}(v)$. De esta forma,

$$C'(u, v) = C'(F(F^{(-1)}(x)), G(G^{(-1)}(y))) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (1.21)$$

□

Observación 1.5. Este corolario proporciona la forma de obtener la única subcópula C' que cumple que $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$, $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ sin mayores restricciones. Por ello, va a ser el resultado que se aplique en la práctica cuando se quiera obtener la cópula asociada a una distribución bivalente con unas marginales determinadas.

Mientras F y G sean continuas, la subcópula C' será una cópula, pues $\text{Ran}F = \text{Ran}G = \mathbb{I}$. Si alguna no es continua, sólo podemos tener una subcópula, que podremos extender a una cópula. ◁

Ejemplo 1.8. Calculemos la cópula asociada a la distribución

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty] \\ 1 - e^{-y}, & (x, y) \in (1, \infty] \times [0, \infty] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} .$$

Las marginales son:

$$F(x) = H(x, \infty) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 1, & x > 1 \\ 0, & x < -1 \end{cases} \quad \text{y} \quad G(y) = H(\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases} .$$

Las quasi-inversas de F y G son $F^{(-1)}(u) = 2u - 1$ y $G^{(-1)}(v) = -\log(1 - v)$, para $u, v \in \mathbb{I}$. Como $\text{Ran}F = \text{Ran}G = \mathbb{I}$, (1.20) da la cópula C dada por

$$C(u, v) = H(2u - 1, -\log(1 - v)) = \frac{(2u - 1 + 1)(e^{-\log(1-v)} - 1)}{2u - 1 + 2e^{-\log(1-v)} - 1} = \frac{uv}{u + v - uv} .$$

◇

Ejemplo 1.9. *Distribuciones bivariantes de valores extremos de tipo B.* Esta familia de distribuciones paramétrica está indexada por el parámetro $\theta \geq 1$. Sus distribuciones son de la forma

$$H_\theta(x, y) = \exp \left[- \left(e^{-\theta x} + e^{-\theta y} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]. \quad (1.22)$$

La distribución marginal de la primera variable y su inversa son:

$$F(x) = H_\theta(x, +\infty) = \exp \left[- \left(e^{-\theta x} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] = \exp \left[-e^{-x} \right] \text{ y } F^{-1}(u) = -\log(-\log u).$$

Análogamente se calculan $G(y) = \exp[-e^{-y}]$ y $G^{-1}(v) = -\log(-\log v)$. Notemos que en las marginales no aparece el parámetro θ , lo que hace pensar que sea un **parámetro para medir la dependencia entre las variables aleatorias X e Y** .

Usando el Corolario 1.2, podemos construir la cópula asociada a H_θ ,

$$\begin{aligned} C_\theta(u, v) &= H_\theta \left(F^{-1}(u), G^{-1}(v) \right) \\ &= \exp \left[- \left(e^{-\theta(-\log(-\log u))} + e^{-\theta(-\log(-\log v))} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \\ &= \exp \left[- \left((-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]. \end{aligned} \tag{1.23}$$

A esta familia paramétrica de cópulas se la conoce como la *familia de Gumbel–Hougaard* o simplemente *familia de Gumbel*. ◊

Observación 1.6. Se comentaba en la Observación 1.5 que una cópula se podía ver como una distribución con soporte en \mathbb{I}^2 . Aunque ésta es una forma compacta y fácil de caracterizar a las cópulas, formalmente no es del todo correcta. Para que fuesen distribuciones, tendrían que estar definidas en $\overline{\mathbb{R}}^2$, y no en \mathbb{I}^2 . Lo que se puede hacer es extender el dominio de la cópula a $\overline{\mathbb{R}}^2$ para tener realmente una distribución bivalente, con marginales uniformes en \mathbb{I} :

$$H_C(x, y) := \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \\ C(x, y), & (x, y) \in \mathbb{I}^2 \\ x, & y > 1, x \in \mathbb{I} \\ y, & x > 1, y \in \mathbb{I} \\ 1, & x > 1, y > 1 \end{cases} . \tag{1.24}$$

H_C es una función de distribución con marginales $\mathcal{U}(0, 1)$ y con soporte en \mathbb{I}^2 . En la Figura 1.5 se representa la extensión de la cópula producto, H_Π . ◁

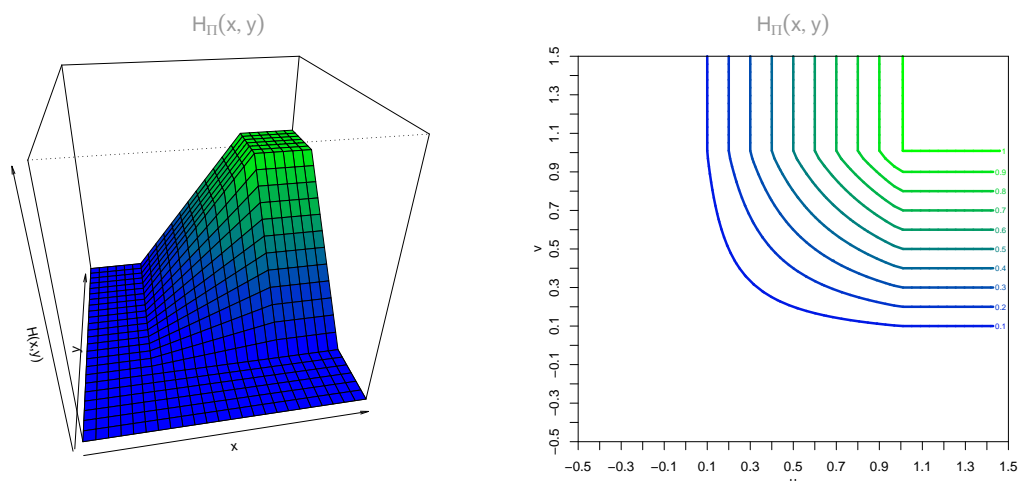


Figura 1.5: Extensión de la cópula Π mediante H_{Π} .

1.4. Cópulas y variables aleatorias: midiendo la dependencia

De acuerdo con el Teorema de Sklar, cuando se escribe la distribución conjunta F en términos de las marginales F y G ,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \tag{1.25}$$

lo que se hace es separar la distribución conjunta en las marginales y en la cópula. De este modo, **la cópula representa la *dependencia* entre X e Y** . Esta es la importancia de las cópulas, separar el comportamiento marginal de la dependencia que aparece en H . Por esta razón, a las funciones cópula también se las conoce como **funciones de dependencia**.

Por otro lado, la propiedad de separar el comportamiento marginal del comportamiento conjunto (dependencia), hace necesaria la teoría de las cópulas, pues esto no se puede hacer por medio de la teoría estándar de funciones de distribución.

Las cópulas son una herramienta excelente para tratar la dependencia entre dos variables aleatorias de una forma estandarizada, sin que importen las distribuciones marginales de las variables. También permiten construir una distribución conjunta con la estructura de dependencia que queramos. Su importancia es tal, que “la mayor parte del estudio de distribuciones conjuntas se puede reducir al estudio de cópulas” [72]. La forma de estandarizar el tratamiento de la dependencia es trabajando con las **transformadas**

integrales de probabilidad de $X \sim F$ e $Y \sim G$,

$$F(X) \sim U \text{ y } G(Y) \sim V. \quad (1.26)$$

Mediante las transformaciones inversas,

$$F^{(-1)}(U) \sim F \text{ y } G^{(-1)}(V) \sim G, \quad (1.27)$$

podemos construir la función de distribución bivalente H que recoja la estructura de dependencia dada por la cópula C :

$$\begin{aligned} C(F(x), G(y)) &= \mathbb{P}\{U \leq F(x), V \leq G(y)\} \\ &= \mathbb{P}\{F^{(-1)}(U) \leq x, G^{(-1)}(V) \leq y\} \\ &= \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &=: H(x, y). \end{aligned}$$

Al tratar la dependencia de forma aislada y estandarizada (sin tener fijadas las distribuciones marginales) se puede conseguir un amplio catálogo de posibles situaciones de dependencia para las distribuciones marginales que queramos.

En esta sección se ven las propiedades de las cópulas como funciones de dependencia y cómo nos permiten caracterizar la independencia o la dependencia perfecta de una manera sencilla. Empezamos enunciando la versión del Teorema de Sklar para variables aleatorias.

Teorema 1.7. *Sean X e Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G respectivamente, y función de distribución conjunta H . Entonces existe una cópula para la que se verifica (1.17). Si F y G son continuas, C es única. En otro caso, C está unívocamente determinada en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.*

Demostración. Es trivial aplicando el Teorema de Sklar. □

Definición 1.12. Dadas dos variables aleatorias X e Y , la cópula dada por el Teorema de Sklar se denomina la *cópula de X e Y* y se denotará por C_{XY} .

A partir de aquí, trabajaremos bajo la hipótesis de que X e Y son variables aleatorias continuas, ya que de este modo la cópula C_{XY} es única y no hay que distinguir la única copula de X e Y en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$ de la extensión no única a \mathbb{I}^2 .

1.4.1. Independencia

El siguiente teorema caracteriza la independencia de dos variables aleatorias por medio de la cópula producto. Recordemos que X e Y son independientes si y sólo si $H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$.

Teorema 1.8. *Sean X e Y variables aleatorias continuas. Entonces X e Y son independientes si y sólo si $C_{XY} = \Pi$.*

Demostración. Si X e Y son independientes, entonces

$$C_{XY}(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) = F(F^{(-1)}(u))G(G^{(-1)}(v)) = uv. \quad (1.28)$$

Recíprocamente, si $C_{XY} = \Pi$, entonces por (1.17),

$$H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)) = F(x)G(y). \quad (1.29)$$

□

1.4.2. Dependencia perfecta y cotas de Fréchet–Hoeffding

De acuerdo con la desigualdad de Fréchet–Hoeffding, sabemos que $W = C^-$ y $M = C^+$ son cotas para todas las cópulas, es decir que

$$C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = C^+(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}.$$

Como consecuencia del Teorema de Sklar, si X e Y son variables con distribución conjunta F y marginales F_1 y F_2 , para todo x, y en $\overline{\mathbb{R}}$ se tiene:

$$\max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \leq C(F_1(x), F_2(y)) = F(x, y) \leq \min(F_1(x), F_2(y)). \quad (1.30)$$

Al ser C^- y C^+ cópulas, por el Teorema de Sklar las cotas de (1.30) son funciones de distribución, con lo que tenemos una desigualdad análoga a la de cópulas para funciones de distribución. A las distribuciones $F^-(x, y) := \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$ y $F^+(x, y) := \min(F_1(x), F_2(y))$ se las conoce como las *cotas de Fréchet–Hoeffding para distribuciones conjuntas con marginales F_1 y F_2* .

Este es un resultado conocido en la teoría de las **clases de Fréchet**, una teoría parecida a la de cópulas que estudia las clases de distribuciones multivariantes $\mathcal{F}(F_1, \dots, F_m)$ con marginales fijadas F_1, \dots, F_m . En [36] tenemos una versión de este resultado deducido a partir de las clases de Fréchet.

Las cotas de Fréchet–Hoeffding juegan un papel muy importante, ya que nos permiten caracterizar la dependencia perfecta entre dos variables aleatorias, tanto a partir de distribuciones como de cópulas.

Definición 1.13. El conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ se dice que es *comonótono*³ si, para todo par de puntos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de A se verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array} \right. \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq y_1 \\ x_2 \geq y_2 \end{array} \right. . \tag{1.31}$$

Definición 1.14. El conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ se dice que es *contramonótono*⁴ si, para todo par de puntos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de A se verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \geq y_2 \end{array} \right. \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array} \right. . \tag{1.32}$$

Un conjunto comonótono es simultáneamente no decreciente en cada componente y es un conjunto “fino”, no puede contener ningún subconjunto de dimensión mayor que uno. Por otro lado, un conjunto contramonótono es no decreciente en una componente y no creciente en la otra componente, y también es “fino”. Los vectores aleatorios con **soporte comonótono o contramonótono muestran la dependencia más fuerte posible, que generaliza el concepto de dependencia perfecta lineal a un contexto funcional más general.**

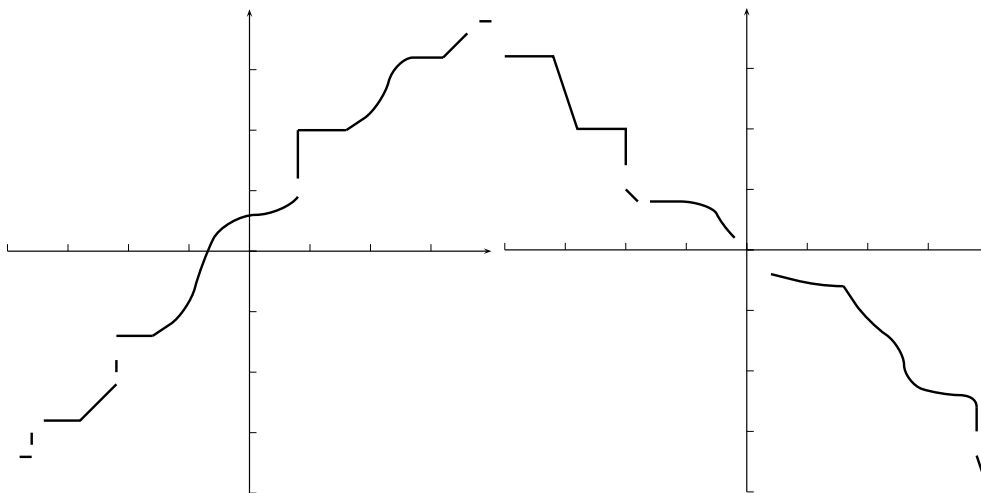


Figura 1.6: Conjunto comonótono y contramonótono.

Observación 1.7. Hay varias formas de abordar el tratamiento de la dependencia perfecta y su relación con las cópulas. En concreto, en [59], se definen los conjuntos *no decrecientes*

³Traducción de *comonotonic*. A veces se traduce por comonotónico.

⁴Traducción de *countermonotonic*. A veces se traduce por contramonotónico.

y *no crecientes*, probando que son equivalentes a los comonótonos y contramonótonos, respectivamente. Esta forma de proceder, aunque es más intuitiva y sencilla, proporciona resultados menos fuertes y la mayoría de autores prefiere la que aquí se expone.

No obstante, como puede ser adecuada para probar de forma más directa la relación de las cópulas con la dependencia perfecta, se expone en el Apéndice A. \triangleleft

Definición 1.15. El vector aleatorio (X, Y) es *comonótono* o *dependiente perfectamente positivo* si su soporte $A \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ es un conjunto comonótono. También se dice que las variables X e Y son *comonótonas*.

Notemos que si x e y pertenecen al soporte comonótono de la v.a. X , es decir, son posibles valores de X , entonces x e y están ordenados componente a componente. Esto es porque \leq define una relación de orden *total* (lo habitual es *parcial*) en un conjunto comonótono.

Definición 1.16. El vector aleatorio (X, Y) es *contramonótono* o *dependiente perfectamente negativo* si su soporte $A \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ es un conjunto contramonótono. También se dice que las variables X e Y son *contramonótonas*.

Teorema 1.9 (Caracterización de la dependencia perfecta positiva). *Un vector aleatorio (X, Y) de variables continuas, con distribuciones marginales F_1 y F_2 y distribución conjunta F , es comonótono si y sólo si alguno de los siguientes enunciados equivalentes se cumple:*

- I. (X, Y) tiene soporte comonótono.
- II. $F(x, y) = \min(F_1(x), F_2(y)) = F^+(x, y), \forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
- III. $C_{XY} = C^+ = M$.
- IV. $(X, Y) \stackrel{d}{=} (F_1^{(-1)}(U), F_2^{(-1)}(U)),$ con $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
- V. *Existe una variable aleatoria Z y funciones no decrecientes f_1 y f_2 tal que $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z))$.*

Demostración. Seguimos la demostración dada por [15]. Basta probar que los enunciados son equivalentes entre sí, pues el primer enunciado es la definición de variables comonótonas. La equivalencia se prueba mediante una cadena de implicaciones:

I \Rightarrow II

La distribución conjunta para un punto (x, y) *fijado* que pertenece al soporte A se puede escribir como

$$F(x, y) = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = \mathbb{P}\{(X, Y) \in A_1 \cap A_2\}, \tag{1.33}$$

donde

$$A_1 := \{(s, t) \in A : s \leq x\} \text{ y } A_2 := \{(s, t) \in A : t \leq y\}. \tag{1.34}$$

La propiedad de comonotonía nos asegura que para todo $(s, t) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq s \\ y \leq t \end{array} \right. \text{ o } \left\{ \begin{array}{l} x \geq s \\ y \geq t \end{array} \right. .$$

Esto nos asegura que cuando se cumpla el segundo caso, que es el que nos interesa, simultáneamente $s \leq x$ y $t \leq y$ y entonces $A_1 \subset A_2$ si $x \leq y$ o $A_2 \subset A_1$ si $x \geq y$. Entonces, si $x \leq y$, $A_1 \cap A_2 = A_1$ y (1.33) es $F_1(x)$, siendo además menor que $F_2(y)$. Si $x \geq y$, $A_2 \cap A_1 = A_2$ y (1.33) es $F_2(y)$, menor que $F_1(x)$. Por lo tanto queda probado que $F(x, y) = \min(F_1(x), F_2(y))$.

II \Rightarrow III

La cópula asociada a X e Y , con la distribución conjunta F^+ , es la única dada por el Teorema de Sklar, C^+ :

$$F^+(x, y) = \min(F_1(x), F_2(y)) = C^+(F_1(x), F_2(y)). \tag{1.35}$$

III \Rightarrow IV

Como $C_{XY} = C^+$, entonces $F(x, y) = C_{XY}(F_1(x), F_2(y)) = \min(F_1(x), F_2(y))$ y $(X, Y) \sim F$. Tenemos que demostrar que la distribución de $(F_1^{(-1)}(U), F_2^{(-1)}(U))$ es F . Para ello:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{F_1^{(-1)}(U) \leq x, F_2^{(-1)}(U) \leq y\} &= \mathbb{P}\{U \leq F_1(x), U \leq F_2(y)\} \\ &= \mathbb{P}\{U \leq \min(F_1(x), F_2(y))\} \\ &= \min(F_1(x), F_2(y)) \\ &= F(x, y). \end{aligned}$$

IV \Rightarrow V

Trivial, tomando $Z = U$ y $f_i = F_i^{(-1)}$, $i = 1, 2$.

V \Rightarrow I

Supongamos que existen Z v.a. con soporte B y f_i , $i = 1, 2$ funciones no decrecientes tales que $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z))$. Hay que probar que el soporte de (X, Y) es comonótono.

El conjunto de posibles valores que puede tomar X es $A = \{(f_1(z), f_2(z)) : z \in B\}$. Hay que ver que A es comonótono. Para empezar,

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in A, \exists z_1 \in B : (x_1, x_2) &= (f_1(z_1), f_2(z_1)) \text{ y} \\ \forall (y_1, y_2) \in A, \exists z_2 \in B : (y_1, y_2) &= (f_1(z_2), f_2(z_2)). \end{aligned}$$

Entonces, hay dos posibilidades que conducen ambas a la comonotonía.

$$z_1 \leq z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = f_1(z_1) \leq f_1(z_2) = y_1 \\ x_2 = f_2(z_1) \leq f_2(z_2) = y_2 \end{cases} \quad \text{o} \quad z_2 \leq z_1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(z_2) \leq f_1(z_1) = x_1 \\ y_2 = f_2(z_2) \leq f_2(z_1) = x_2 \end{cases} .$$

□

Teorema 1.10 (Caracterización de la dependencia perfecta negativa). *Un vector aleatorio (X, Y) de variables continuas, con distribuciones marginales F_1 y F_2 y distribución conjunta F , es contramonótono si y sólo si alguno de los siguientes enunciados equivalentes se cumple:*

- I. (X, Y) tiene soporte contramonótono.
- II. $F(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) = F^+(x, y), \forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
- III. $C_{XY} = C^- = W$.
- IV. $(X, Y) \stackrel{d}{=} (F_1^{(-1)}(U), F_2^{(-1)}(1 - U))$, con $U \sim U(0, 1)$.
- V. Existe una variable aleatoria Z , una función no decreciente f_1 y otra no creciente f_2 tales que $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z))$.

Demostración. La demostración será análoga a la del Teorema 1.9, aunque no del todo trivial. Como antes, sólo es necesario probar la equivalencia porque I es la definición.

I \Rightarrow II

Para un punto (x, y) fijado perteneciente al soporte A ,

$$\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = \mathbb{P}\{(X, Y) \in A_1\} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = \mathbb{P}\{(X, Y) \in A_2\}. \quad (1.36)$$

Con $A_1 = \{(s, t) \in A : s \leq x, t \leq y\}$ y $A_2 = \{(s, t) \in A : s > x, t > y\}$. Como (X, Y) es contramonótono, una de las probabilidades de (1.36) será nula. Entonces, si lo es la primera, $F(x, y) = 0$ y si lo es la segunda,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = 1 - \mathbb{P}\{X > x, Y \leq y\} \\ &\quad - \mathbb{P}\{X \leq x, Y > y\} - \mathbb{P}\{X > x, Y > y\} \\ &= 1 - (1 - F_1(x)) - (1 - F_2(y)) = F_1(x) + F_2(y) - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se pueden englobar ambos casos en $F(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) = F^-(x, y)$.

II \Rightarrow III

La cópula asociada a X e Y , con la distribución conjunta F^- , es la única dada por el Teorema de Sklar, C^- :

$$F^-(x, y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) = C^-(F_1(x), F_2(y)). \tag{1.37}$$

III \Rightarrow IV

Como $C_{XY} = C^-$, entonces $F(x, y) = C_{XY}(F_1(x), F_2(y)) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0)$ y $(X, Y) \sim F$. Tenemos que demostrar que la distribución de $(F_1^{(-1)}(U), F_2^{(-1)}(1 - U))$ es F . Para ello:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{F_1^{(-1)}(U) \leq x, F_2^{(-1)}(1 - U) \leq y\} &= \mathbb{P}\{U \leq F_1(x), 1 - U \leq F_2(y)\} \\ &= \mathbb{P}\{U \leq F_1(x), 1 - F_2(y) \leq U\} \\ &= \mathbb{P}\{1 - F_2(y) \leq U \leq F_1(x)\} \\ &= \max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \\ &= F(x, y). \end{aligned}$$

IV \Rightarrow V

Trivial, tomando $Z = U$, $f_1 = F_1^{(-1)}(\cdot)$ y $f_2 = F_2^{(-1)}(1 - \cdot)$.

V \Rightarrow I

Supongamos que existe una v.a. Z con soporte B , una función no decreciente f_1 y una función no creciente f_2 , tales que $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z))$. Hay que probar que el soporte de (X, Y) es contramonótono.

El conjunto de posibles valores que puede tomar X es $A = \{(f_1(z), f_2(z)) : z \in B\}$. Veamos que A es contramonótono. Se tiene

$$\begin{aligned} \forall (x_1, y_1) \in A, \exists z_1 \in B : (x_1, y_1) &= (f_1(z_1), f_2(z_1)) \text{ y} \\ \forall (x_2, y_2) \in A, \exists z_2 \in B : (x_2, y_2) &= (f_1(z_2), f_2(z_2)) \end{aligned}$$

Entonces, hay dos posibilidades que conducen ambas a la contramonotonía:

$$z_1 \leq z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = f_1(z_1) \leq f_1(z_2) = x_2 \\ y_2 = f_2(z_2) \leq f_2(z_1) = y_1 \end{cases} \text{ o } z_2 \leq z_1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_2(z_1) \geq f_2(z_2) = y_2 \\ x_2 = f_1(z_2) \geq f_1(z_1) = x_1 \end{cases} .$$

□

Observación 1.8. Los enunciados quintos de los Teoremas 1.9 y 1.10 vienen a formalizar la dependencia funcional entre las variables. Por ejemplo, X e Y son comonotónicas si y sólo si $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z))$, con Z una v.a. y $f_i, i = 1, 2$ funciones no decrecientes. Si denotamos por $(S_1, S_2) = (f_1(Z), f_2(Z))$, podemos despejar S_2 con respecto a S_1 casi por

doquier:

$$S_2 = g(S_1) \text{ con } g = f_2 \circ f_1^{(-1)} \text{ no decreciente.} \tag{1.38}$$

Con lo cual $(X, Y) \stackrel{d}{=} (S, g(S))$, con S una v.a. y g no decreciente, lo que hace que Y sea una función no decreciente de X en casi todo punto.

Así:

$$Y \text{ es una función no decreciente de } X \Leftrightarrow C_{XY} = C^+,$$

$$Y \text{ es una función no creciente de } X \Leftrightarrow C_{XY} = C^-.$$

◁

La dependencia perfecta de (X, Y) no impone ninguna restricción a las distribuciones marginales salvo en el caso lineal, donde las marginales deben pertenecer a la misma familia de localización y escala.

1.4.3. Transformaciones monótonas e invarianza de cópulas

Las transformaciones crecientes o decrecientes de las variables aleatorias X e Y van a afectar de una forma predecible a la cópula C_{XY} . El Teorema 1.11 establece la invarianza para las estrictamente crecientes y el Teorema 1.12 cómo se comporta la cópula para las otras posibles elecciones.

Recordemos que si $\alpha : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente y $X \sim F$, entonces $\alpha(X) \sim F(\alpha^{-1})$, pues $F_{\alpha(X)}(x) = \mathbb{P}\{\alpha(X) \leq x\} = \mathbb{P}\{X \leq \alpha^{-1}(x)\} = F_X(\alpha^{-1}(x))$. Del mismo modo, si α es estrictamente decreciente, entonces $\alpha(X) \sim 1 - F(\alpha^{-1})$, porque $F_{\alpha(X)}(x) = \mathbb{P}\{\alpha(X) \leq x\} = \mathbb{P}\{X \geq \alpha^{-1}(x)\} = 1 - F_X(\alpha^{-1}(x))$.

Teorema 1.11. Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son funciones estrictamente crecientes en $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ respectivamente, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Por lo tanto C_{XY} es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de X e Y .

Demostración. Denotemos por F_1 y G_1 las distribuciones de X e Y y por F_2 y G_2 las de $\alpha(X)$ y $\beta(Y)$.

Como X e Y son continuas, $\text{Ran}F_2 = \text{Ran}G_2 = \mathbb{I}^2$ y por tanto $\forall u, v \in \mathbb{I}, \exists x, y \in \overline{\mathbb{R}} : u = F_2(x), v = G_2(y)$. Aplicando (1.17) varias veces y que α y β son estrictamente crecientes se prueba el resultado:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = H_{\alpha(X)\beta(Y)}(x, y) = \mathbb{P}\{\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y\}$$

.....

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) = H_{XY}(\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)) \\
 &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
 &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)).
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.10. Consideremos dos variables X e Y normales estándar. La *cópula Gaussiana* es la cópula C_ρ^{Ga} que junta las marginales normales en una normal bivalente estándar con parámetro de correlación $\rho \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
 C_\rho^{Ga}(u, v) &= \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dt ds, \quad (1.39)
 \end{aligned}$$

siendo $\Phi_\rho(\cdot, \cdot)$ la distribución normal bivalente estandarizada⁵ con parámetro de correlación ρ . Si consideramos las variables $S = \exp(X)$ y $T = \exp(Y)$ (transformaciones estrictamente crecientes de X e Y), podemos asegurar en virtud del Teorema 1.11 que S y T siguen teniendo la misma cópula, aún a pesar de que ahora son distribuciones log-normal. Lo que sí que ha cambiado es su distribución conjunta, pues antes era una normal bivalente,

$$H(x, y) = C_\rho^{Ga}(\Phi(x), \Phi(y)) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(\Phi(x)), \Phi^{-1}(\Phi(y))) = \Phi_\rho(x, y), \quad (1.40)$$

y ahora (teniendo en cuenta que la distribución de una variable log-normal se puede expresar como $\Phi\left(\frac{\log(\cdot) - \mu}{\sigma}\right)$) es

$$H(s, t) = C_\rho^{Ga}(\Phi(\log s), \Phi(\log t)). \quad (1.41)$$

◇

Teorema 1.12. Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Sean α y β funciones estrictamente monótonas en $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ respectivamente.

I. Si α es creciente y β decreciente, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v). \quad (1.42)$$

II. Si α es decreciente y β creciente, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v). \quad (1.43)$$

⁵Medias nulas y varianzas unitarias.

III. Si α y β son ambas estrictamente decrecientes, entonces

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v). \tag{1.44}$$

Demostración. Sean F_1 y G_1 las distribuciones de X e Y y F_2 y G_2 las de $\alpha(X)$ y $\beta(Y)$. X e Y son continuas, así que $\forall u, v \in \mathbb{I}, \exists x, y \in \overline{\mathbb{R}} : u = F_2(x), v = F_2(y)$.

I. Razonamos de manera similar al Teorema 1.11, con cuidado pues ahora β es decreciente:

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= H_{\alpha(X)\beta(Y)}(x, y) = \mathbb{P}\{\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y\} \\ &= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)) \\ &= \mathbb{P}\{X \leq \alpha^{-1}(x)\} - \mathbb{P}\{X \leq \alpha^{-1}(x), Y < \beta^{-1}(y)\} \\ &= H_{XY}(\alpha^{-1}(x), +\infty) - H_{XY}(\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\infty)) - C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), 1) - C_{XY}(F_2(x), 1 - G_2(y)). \end{aligned}$$

II. La comprobación es análoga a la del caso anterior.

III. En este caso es un poco más engorroso, aunque sencillo:

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= H_{\alpha(X)\beta(Y)}(x, y) = \mathbb{P}\{\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y\} \\ &= \mathbb{P}(X \geq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < \alpha^{-1}(x) \text{ o } Y < \beta^{-1}(y)) \\ &= 1 - [\mathbb{P}(X < \alpha^{-1}(x)) + \mathbb{P}(Y < \beta^{-1}(y)) \\ &\quad - \mathbb{P}(X < \alpha^{-1}(x), Y < \beta^{-1}(y))] \\ &= 1 - H_{XY}(\alpha^{-1}(x), \infty) - H_{XY}(\infty, \beta^{-1}(y)) \\ &\quad + H_{XY}(\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y)) = 1 - C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\infty)) \\ &\quad - C_{XY}(F_1(\infty), G_1(\beta^{-1}(y))) + C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= F_2(x) + G_2(y) - 1 + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)). \end{aligned}$$

□

Observación 1.9. Los teoremas anteriores pueden ser más generales y exigir que las transformaciones sean solamente estrictamente monótonas en casi todo punto, para permitir que la propiedad falle en conjuntos de medida nula. Los resultados seguirían siendo válidos, sólo habría que considerar las inversas generalizadas en las demostraciones. ◁

1.5. Componentes de una cópula, densidad y representación canónica

En esta sección estudiamos la descomposición de las cópulas como funciones de distribución y se muestra un resultado análogo al Teorema de Sklar en términos de densidades.

1.5.1. Componentes y densidad de una cópula

Definición 1.17. La *densidad* c asociada a la cópula C es

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}. \quad (1.45)$$

Teorema 1.13. *La densidad de una cópula existe casi por doquier en el interior de \mathbb{I}^2 y es no negativa.*

Demostración. Por el Teorema 1.4, las derivadas parciales $\frac{\partial C}{\partial u}$ y $\frac{\partial C}{\partial v}$ existen en casi todo punto de \mathbb{I} y son no decrecientes. Por ser no decrecientes, son diferenciables en casi cualquier punto y por eso la densidad existe c.p.d. Al ser las derivadas parciales no negativas, la densidad también lo es. \square

Observación 1.10. Al igual que se comentaba en la Observación 1.6, la densidad de la cópula C definida en (1.45) se debe entender como una densidad extendida a \mathbb{R}^2 mediante

$$f_c(x, y) := \begin{cases} c(x, y), & (x, y) \in (0, 1)^2 \\ 0, & (x, y) \notin (0, 1)^2 \end{cases}. \quad (1.46)$$

\triangleleft

Definición 1.18. Dada la cópula C , denotaremos por A_C a la *componente absolutamente continua*

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds, \quad (1.47)$$

y por S_C a la *componente singular*

$$S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v). \quad (1.48)$$

A una cópula para la que $C = A_C$ en \mathbb{I}^2 se le denomina *absolutamente continua*, mientras que se dice *singular* si $C = S_C$ en \mathbb{I}^2 .

Cuando no es absolutamente continua ni singular, se dice que tiene una componente

absolutamente continua y una componente singular, y se puede descomponer según

$$C = A_C + S_C. \tag{1.49}$$

En este caso, ni A_C ni S_C serán cópulas.

Observación 1.11. Si C es singular, entonces $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = 0$ en casi todo punto de \mathbb{I} y el soporte de C es un conjunto de medida de Lebesgue nula.

◁

Ejemplo 1.11. La cópula producto $C^\perp(u, v) = uv$ es absolutamente continua, porque para todo (u, v) en \mathbb{I}^2 ,

$$A_{C^\perp} = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C^\perp(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds = \int_0^u \int_0^v 1 dt ds = uv = C^\perp(u, v). \tag{1.50}$$

Sin embargo, las cotas de Fréchet–Hoeffding son singulares, pues su derivada es nula en casi todo punto:

$$\frac{\partial^2 C^+(u, v)}{\partial u \partial v} = \begin{cases} 0, & u > v \\ 0, & u < v \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 C^-(u, v)}{\partial u \partial v} = \begin{cases} 0, & u + v > 1 \\ 0, & u + v < 1 \end{cases}. \tag{1.51}$$

Por lo tanto $A_{C^+} = 0$, $S_{C^+} = C^+$ y $A_{C^-} = 0$, $S_{C^-} = C^-$.

Notemos que tanto C^- como C^+ no son derivables en $u = v$ y $u + v = 1$ respectivamente.

◇

Ejemplo 1.12. Una familia de cópulas con componentes absolutamente continuas y singulares es la *familia de Marshall–Olkin*, indexada por los parámetros $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta}, & u^\alpha \leq v^\beta \end{cases}. \tag{1.52}$$

Cuando $\alpha = \beta = \theta$ esta es la *familia de Cuadras–Augé*, presentada en el Ejemplo 1.5. Su derivada existe salvo en la curva $u^\alpha = v^\beta$:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{\alpha, \beta}(u, v) = \begin{cases} (1 - \alpha)u^{-\alpha}, & u^\alpha > v^\beta \\ (1 - \beta)v^{-\beta}, & u^\alpha < v^\beta \end{cases}. \tag{1.53}$$

La componente absolutamente continua es

$$A_{\alpha, \beta}(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C_{\alpha, \beta}(t, s)}{\partial u \partial v} dt ds \tag{1.54}$$

$$= \begin{cases} uv^{1-\beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} (u^\alpha)^{\frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha\beta}}, & u^\alpha > v^\beta \\ u^{1-\alpha}v - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta} (v^\beta)^{\frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha\beta}}, & u^\alpha < v^\beta \end{cases} \tag{1.55}$$

$$= \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}) - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} [\min(u^\alpha, v^\beta)]^{\frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha\beta}} \tag{1.56}$$

$$= C_{\alpha,\beta}(u, v) - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} [\min(u^\alpha, v^\beta)]^{\frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha\beta}}. \tag{1.57}$$

Y la singular,

$$S_{\alpha,\beta}(u, v) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} [\min(u^\alpha, v^\beta)]^{\frac{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\alpha\beta}}. \tag{1.58}$$

◇

El siguiente lema hace trivial comprobar si una función C es 2-creciente cuando ésta es absolutamente continua.

Lema 1.6. *Sea C una función con derivada parcial mixta continua (densidad continua) y tal que:*

- I. $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} \geq 0$ para casi todo $(u, v) \in \mathbb{I}^2$.
- II. $C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s \partial t} dt ds, \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2$.

Entonces C es 2-creciente.

Demostración. Es un cálculo sencillo.

$$\begin{aligned} \Delta_{u_1}^{u_2} \Delta_{v_1}^{v_2} C(u, v) &= C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \\ &= \int_0^{u_2} \int_0^{v_2} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds - \int_0^{u_2} \int_0^{v_1} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds \\ &\quad - \int_0^{u_1} \int_0^{v_2} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds + \int_0^{u_1} \int_0^{v_1} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{v_2} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds - \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{v_1} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial^2 C(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds \geq 0. \end{aligned}$$

□

1.5.2. Conexión con la Teoría de la Medida

Uno de los resultados básicos de la Teoría de la Probabilidad es que toda probabilidad define una función de distribución y, recíprocamente, toda distribución genera una medida de probabilidad asociada. En el caso bivariante, una función de distribución H define una medida de probabilidad V_H en \mathbb{R}^2 mediante el H -volumen de la Definición 1.1,

$$V_H((a_1, a_2] \times (b_1, b_2]) := \Delta_{a_1}^{a_2} \Delta_{b_1}^{b_2} H(x, y), \text{ con } a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2. \tag{1.59}$$

V_H es una medida en la semiálgebra de los intervalos $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$, que se puede extender de forma única a la σ -álgebra de Borel \mathbb{B}_2 mediante el Teorema de Caratheodory [3].

De este modo, como las cópulas se comportan como funciones de distribución en \mathbb{I}^2 (ver la Observación 1.6), cada cópula C induce una medida de probabilidad V_C en \mathbb{I}^2 al igual que en (1.59) y que se puede simplificar como

$$V_C([0, u] \times [0, v]) = C(u, v). \tag{1.60}$$

De esta forma, **la medida inducida por C es el C -volumen V_C .**

Intuitivamente, el C -volumen de un subconjunto de \mathbb{I}^2 es la probabilidad de dos variables uniformes en $(0, 1)$, U y V , con función de distribución conjunta C tomen valores dentro de ese subconjunto:

$$V_C(S) = \mathbb{P}\{(U, V) \in S\}. \tag{1.61}$$

Observación 1.12. Es importante destacar que, al contrario que las distribuciones bivariantes en general, **las cópulas no tienen átomos** (puntos individuales con probabilidad o C -volumen positivo). En consecuencia, la componente singular no tiene componente discreta, como suele suceder con las distribuciones bivariantes. Esto se debe a que las marginales de C son variables $\mathcal{U}(0, 1)$ y por tanto absolutamente continuas, lo que se traduce en la que no hay puntos específicos con probabilidad positiva. Se puede ver formalmente usando (1.12). ◁

A las C -medidas V_H a veces se les denomina **medidas doblemente estocásticas**⁶ ya que si $S \subset \mathbb{I}$ y S medible,

$$V_C(S \times \mathbb{I}) = V_C(\mathbb{I} \times S) = \mathbb{P}\{V \in S\} = \int_{\mathbb{I}} 1_{\{x \in S\}} dx = m(S), \tag{1.62}$$

donde m denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

La descomposición anterior de una cópula C en sus componentes absolutamente continua y singular tiene una clara interpretación en términos de la teoría de la medida: es la descomposición de la C -medida, inducida por la medida de Lebesgue m en \mathbb{R}^2 , que proporciona el Teorema de descomposición de Lebesgue. De dicha descomposición surgen la medida absolutamente continua con respecto a m , V_{AC} y la medida singular con respecto

⁶El término *doblemente estocástico* es la terminología que se usa para denotar a las matrices cuadradas $A = (a_{ij})$ tales que $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \forall j$ y $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i$, es decir, tales que cada fila y columna suman 1.

a m , V_{S_C} . Se tiene la versión de (1.49) en términos de medidas

$$V_C = V_{A_C} + V_{S_C}, \text{ con } V_{A_C} \ll m \text{ y } V_{S_C} \perp m. \tag{1.63}$$

Además, ahora podemos saber cuanta probabilidad acumula la componente absolutamente continua y la singular:

$$V_{A_C}(\mathbb{I}^2) = A_C(1, 1) \text{ y } V_{S_C}(\mathbb{I}^2) = S_C(1, 1). \tag{1.64}$$

Ejemplo 1.13. La C -medida de las componentes de las cotas de Fréchet–Hoeffding, calculadas en el Ejemplo 1.11, es trivial al ser totalmente singulares: $A_{C^+}(1, 1) = A_{C^-}(1, 1) = 0$, $S_{C^+}(1, 1) = S_{C^-}(1, 1) = 1$. De aquí se deduce que la cota inferior C^- acumula toda la probabilidad en la diagonal de \mathbb{I}^2 , con lo que $\mathbb{P}\{U = V\} = 1$ y que la cota superior C^+ la acumula en la segunda diagonal de \mathbb{I}^2 , con lo que $\mathbb{P}\{U + V = 1\} = 1$. Esto se aprecia claramente en la Figura 1.3. \diamond

Ejemplo 1.14. En el caso de la familia de Marshall–Olkin,

$$A_{\alpha,\beta}(1, 1) = 1 - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} \text{ y } S_{\alpha,\beta}(1, 1) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}. \tag{1.65}$$

Y de este modo, la componente singular hace que se acumule probabilidad en la curva $u^\alpha = v^\beta$, con probabilidad $\mathbb{P}\{U^\alpha = V^\beta\} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}$. \diamond

1.5.3. Representación canónica de la densidad

Para el caso de variables aleatorias absolutamente continuas, al existir las densidades marginales y conjunta, podemos combinar el Teorema de Sklar y la densidad de la cópula y obtener la **representación canónica de la densidad conjunta**⁷:

$$f(x, y) = c(F_1(x), F_2(y))f_1(x)f_2(y). \tag{1.66}$$

Dicha representación se obtiene derivando en (1.17) con respecto a x e y . La cópula c se puede expresar en función de las densidades y distribuciones mediante

$$c(F_1(x), F_2(y)) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)f_2(y)}. \tag{1.67}$$

Como F_1 y F_2 son estrictamente crecientes, podemos expresar c de una forma más práctica,

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdot f_2(F_2^{-1}(u_2))}. \tag{1.68}$$

⁷Expresada sólo en términos de las marginales y de la densidad de la cópula.

Esta representación en ocasiones es **útil para calcular la densidad de C** sin tener que derivar. Las expresiones (1.66) y (1.68) se pueden ver como las versiones en términos de densidades del Teorema de Sklar y del Corolario 1.2, respectivamente.

Ejemplo 1.15. La densidad de la cópula Gaussiana presentada en el Ejemplo 1.10 es

$$c_{\rho}^{Ga}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2} + \frac{2\rho\zeta_1\zeta_2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2}{2(1-\rho^2)} \right\}, \quad (1.69)$$

donde $\zeta_1 = \Phi^{-1}(u)$ y $\zeta_2 = \Phi^{-1}(v)$. Esta densidad se puede ver en la Figura 1.7. \diamond

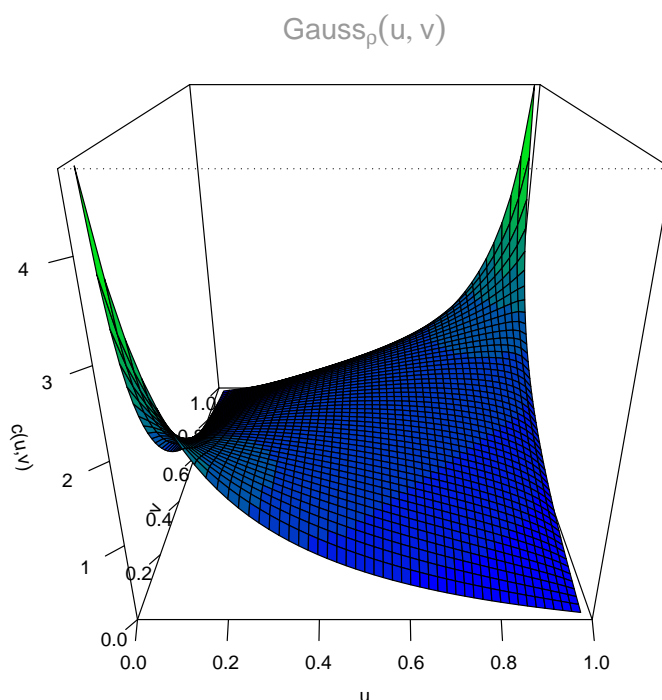


Figura 1.7: Densidad de la cópula Gaussiana con $\rho = 0.5$.

La representación canónica de la densidad conjunta es muy interesante a la hora de la estimación, pues permite estimar primero las marginales y luego usar esas estimaciones (transformadas en las distribuciones), para estimar la densidad de la cópula. Esta técnica se conoce como estimación en dos etapas y es especialmente usada cuando se suponen estructuras paramétricas para las densidades y la cópula (máxima verosimilitud en dos etapas). Un tratamiento más detallado de la estimación según este método se puede ver en [8, 18, 78]. En el Capítulo 7 aplicaremos este método a un conjunto de datos direccionales.

1.6. Cópulas de supervivencia

En la estadística muchas veces estamos interesados en variables aleatorias que miden los tiempos de vida de individuos u objetos en determinada población. La probabilidad de un individuo u objeto de edad X de sobrevivir más allá del tiempo x viene dada por la función de supervivencia.

Aunque al trabajar con tiempos de supervivencia lo lógico es establecer el conjunto de posibles valores de X como $[0, +\infty)$, el desarrollo que haremos supondrá que puede tomar valores en $\bar{\mathbb{R}}$.

Definición 1.19. Dada una variable aleatoria X con función de distribución F , se define la *función de supervivencia* de X como

$$\bar{F}(x) := \mathbb{P}\{X > x\} = 1 - F(x). \quad (1.70)$$

Definición 1.20. Dado un par de variables aleatorias (X, Y) , con función de distribución conjunta H , se define la *función de supervivencia conjunta* como

$$\bar{H}(x, y) := \mathbb{P}\{X > x, Y > y\}. \quad (1.71)$$

Las marginales de la función de supervivencia conjunta son las funciones de supervivencia univariantes pues:

$$\bar{H}(x, -\infty) = \mathbb{P}\{X > x, Y > -\infty\} = \mathbb{P}\{X > x\} = \bar{F}(x), \quad (1.72)$$

$$\bar{H}(-\infty, y) = \mathbb{P}\{X > -\infty, Y > y\} = \mathbb{P}\{Y > y\} = \bar{G}(y). \quad (1.73)$$

A la vista de esto, cabe preguntarse si existirá un resultado similar al Teorema de Sklar pero con funciones de supervivencia en vez de distribuciones. La respuesta es afirmativa, y surge como aplicación de dicho teorema.

Definición 1.21. Dadas dos variables aleatorias X e Y con cópula C , se define la *cópula de supervivencia* de X e Y (o simplemente la cópula de supervivencia de C) como la función⁸

$$\hat{C}(u, v) := u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \quad (1.74)$$

Observación 1.13. La función (1.74) es en efecto una cópula pues:

I. $\forall u, v \in \mathbb{I}, \hat{C}(u, 0) = u + 0 - 1 + C(1 - u, 1) = u - 1 + 1 - u = 0 = \hat{C}(0, v).$

II. $\forall u, v \in \mathbb{I}, \hat{C}(u, 1) = u + 1 - 1 + C(1 - u, 0) = u$ y $\hat{C}(1, v) = v.$

⁸Salvo mención explícita, \hat{C} no representa la estimación de C .

III. $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, $1 - u_2 = w_2 \leq w_1 = 1 - u_1$, $1 - v_2 = t_2 \leq t_1 = 1 - v_1$,

$$\begin{aligned} \Delta_{u_1}^{u_2} \Delta_{v_1}^{v_2} \widehat{C}(u, v) &= \widehat{C}(u_2, v_2) - \widehat{C}(u_2, v_1) - \widehat{C}(u_1, v_2) + \widehat{C}(u_1, v_1) \\ &= u_2 + v_2 - 1 + C(1 - u_2, 1 - v_2) - (u_2 + v_1 - 1 + C(1 - u_2, 1 - v_1)) \\ &\quad - (u_1 + v_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - v_2)) + u_1 + v_1 - 1 + C(1 - u_1, 1 - v_1) \\ &= C(w_2, t_2) - C(w_2, t_1) - C(w_1, t_2) + C(w_1, t_1) \geq 0. \end{aligned}$$

◁

Teorema 1.14 (Teorema de Sklar para funciones de supervivencia). *Sea \overline{H} una función de supervivencia conjunta con distribuciones marginales \overline{F} y \overline{G} . Entonces existe una cópula \widehat{C} tal que*

$$\overline{H}(x, y) = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)), \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{1.75}$$

Si \overline{F} y \overline{G} son continuas, entonces \widehat{C} es única. En otro caso, \widehat{C} está unívocamente determinada en $\text{Ran}\overline{F} \times \text{Ran}\overline{G}$.

Recíprocamente, si \widehat{C} es una cópula y \overline{F} y \overline{G} son funciones de supervivencia, entonces la función \overline{H} definida por (1.75) es una función de supervivencia conjunta con distribuciones marginales \overline{F} y \overline{G} .

Demostración. Basta tener en cuenta que por el Teorema de Sklar existe una cópula C asociada a X e Y y podemos escribir

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, y) &= \mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leq x \text{ o } Y \leq y\} \\ &= 1 - (F(x) + G(y) - H(x, y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + H(x, y) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)) \\ &= \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)), \end{aligned}$$

donde \widehat{C} es la cópula de la Definición 1.21. ◻

Una función que se parece mucho a la cópula de supervivencia es la siguiente:

Definición 1.22. *La función de supervivencia conjunta para dos variables aleatorias uniformes U_1 y U_2 con cópula C se denota por \mathcal{C} y está definida por*

$$\mathcal{C}(u, v) = \mathbb{P}\{U > u, V > v\}, \quad \forall (u, v) \in (0, 1)^2. \tag{1.76}$$

De la propia definición se tiene:

$$\mathcal{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v) = \widehat{C}(1 - u, 1 - v). \tag{1.77}$$

Las funciones \mathcal{C} y \widehat{C} se parecen tanto que se puede reescribir (1.75) en función de \mathcal{C} :

$$\overline{F} = \mathcal{C}(F(x), G(y)). \tag{1.78}$$

Al igual que con el Teorema de Sklar, tenemos el análogo del Corolario 1.2 para funciones de supervivencia.

Corolario 1.3. *Sea \overline{H} una distribución conjunta con distribuciones marginales \overline{F} y \overline{G} , \widehat{C} la cópula derivada del Teorema 1.14 y $\overline{F}^{(-1)}$ y $\overline{G}^{(-1)}$ las quasi-inversas de \overline{F} y de \overline{G} respectivamente. Entonces*

$$\widehat{C}(u, v) = \overline{H}(\overline{F}^{(-1)}(u), \overline{G}^{(-1)}(v)), \quad \forall (u, v) \in \text{Dom}\widehat{C}. \tag{1.79}$$

Demostración. Es análoga a la del Corolario 1.2. □

Otras funciones relacionadas con las cópulas (y las cópulas de supervivencia) son el dual de una cópula y la co-cópula.

Definición 1.23. Se define el *dual de una cópula* C como la función

$$\widetilde{C}(u, v) := u + v - C(u, v). \tag{1.80}$$

Definición 1.24. Se define la *co-cópula de una cópula* C como la función

$$C^*(u, v) := 1 - C(1 - u, 1 - v). \tag{1.81}$$

Ejemplo 1.16. En la siguiente tabla se recogen las cópulas de supervivencia, duales y co-cópulas derivadas de las cotas de Fréchet–Hoeffding y la cópula producto.

C	\widehat{C}	\widetilde{C}	C^*
$M(u, v)$	$M(u, v)$	$\text{máx}(u, v)$	$\text{máx}(u, v)$
$\Pi(u, v)$	$\Pi(u, v)$	$u + v - uv$	$u + v - uv$
$W(u, v)$	$W(u, v)$	$\text{máx}(u + v, 1)$	$\text{mín}(u + v, 1)$

Tabla 1.1: Cópulas de supervivencia, duales y co-cópulas de las cópulas W , Π y M . ◇

Conviene resaltar que **ni el dual de una cópula ni la co-cópula de una cópula son cópulas**, pues fallan en la propiedad I de ser *grounded*:

$$\widetilde{C}(u, 0) = u + C(u, 0) = u \neq 0,$$

$$C^*(u, 0) = 1 - C(1 - u, 1) = 1 - (1 - u) = u \neq 0.$$

No obstante, tienen aplicaciones interesantes cuando C es la cópula de un par de variables aleatorias (X, Y) , como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Dadas un par de variables X e Y con cópula asociada C , se verifican:*

$$\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = C(F(x), G(y)), \tag{1.82}$$

$$\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)), \tag{1.83}$$

$$\mathbb{P}\{X \leq x \text{ o } Y \leq y\} = \widetilde{C}(F(x), G(y)), \tag{1.84}$$

$$\mathbb{P}\{X > x \text{ o } Y > y\} = C^*(\overline{F}(x), \overline{G}(y)). \tag{1.85}$$

Demostración. Las igualdades (1.82) y (1.83) ya han sido probadas en los Teoremas 1.6 y 1.14, respectivamente. Para (1.84):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X \leq x \text{ o } Y \leq y\} &= \mathbb{P}\{X \leq x\} + \mathbb{P}\{Y \leq y\} - \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= F(x) + G(y) - C(F(x), G(y)) \\ &= \widetilde{C}(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Y (1.85) también es sencilla:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X > x \text{ o } Y > y\} &= \mathbb{P}\{X > x\} + \mathbb{P}\{Y > y\} - \mathbb{P}\{X > x, Y > y\} \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - (\overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y))) \\ &= 1 - C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)) \\ &= C^*(\overline{F}(x), \overline{G}(y)). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2. *Sean X e Y dos variables aleatorias con distribuciones marginales F_1 y F_2 y cópula asociada C . Entonces:*

$$M = \text{máx}(X, Y) \sim F_M(\cdot) = C(F_1(\cdot), F_2(\cdot)), \tag{1.86}$$

$$m = \text{mín}(X, Y) \sim F_m(\cdot) = 1 - \widehat{C}(\overline{F}_1(\cdot), \overline{F}_2(\cdot)) = \widetilde{C}(F_1(\cdot), F_2(\cdot)). \tag{1.87}$$

Además, las funciones de supervivencia de M y m son:

$$\overline{F}_M(\cdot) = C^*(\overline{F}_1(\cdot), \overline{F}_2(\cdot)), \tag{1.88}$$

$$\overline{F}_m(\cdot) = \widehat{C}(\overline{F}_1(\cdot), \overline{F}_2(\cdot)). \tag{1.89}$$

Demostración. Si F denota la distribución conjunta de X e Y , para el máximo F_M es

$$F_M(t) = \mathbb{P} \{M \leq t\} = \mathbb{P} \{X \leq t, Y \leq t\} = F(t, t) = C(F_1(t), F_2(t)).$$

Y para el mínimo:

$$\begin{aligned} F_m(t) &= \mathbb{P} \{m \leq t\} = 1 - \mathbb{P} \{m > t\} = 1 - \mathbb{P} \{X > t, Y > t\} \\ &= 1 - \widehat{C}(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t)) = 1 - (\overline{F}_1(t) + \overline{F}_2(t) - 1 + C(F_1(t), F_2(t))) \\ &= F_1(t) + F_2(t) - C(F_1(t), F_2(t)) = \widetilde{C}(F_1(t), F_2(t)). \end{aligned}$$

Para las funciones de supervivencia:

$$\begin{aligned} \overline{F}_M(t) &= 1 - F_M(t) = 1 - C(F_1(t), F_2(t)) = C^*(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t)) \\ \overline{F}_m(t) &= 1 - F_m(t) = 1 - \widetilde{C}(F_1(t), F_2(t)) \\ &= 1 - (F_1(t) + F_2(t) - C(F_1(t), F_2(t))) = \widehat{C}(F_1(t), F_2(t)). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3. *Bajo la composición, \circ , el conjunto de operaciones de construir la cópula de supervivencia (\wedge), el dual de una cópula (\sim) y la co-cópula de una cópula dada ($*$), junto a la operación identidad (i) forman el grupo dihédrico Dih_2 ⁹:*

\circ	i	\wedge	\sim	$*$
i	i	\wedge	\sim	$*$
\wedge	\wedge	i	$*$	\sim
\sim	\sim	$*$	i	\wedge
$*$	$*$	\sim	\wedge	i

Tabla 1.2: Grupo dihédrico Dih_2 para \wedge , \sim y $*$.

Por tanto, las operaciones \wedge , \sim y $$ son idempotentes y guardan una relación especial entre ellas: la composición de dos operaciones distintas da como resultado la tercera operación. Además, forman un grupo conmutativo.*

Demostración. Se puede ver en el Apéndice A.

□

⁹El grupo dihédrico Dih_n es el grupo formado por las isometrías del plano que dejan invariante el n -ágono regular, operadas con la composición.

1.7. Simetría

A continuación tratamos distintos tipos de simetría que pueden tener las variables aleatorias, su caracterización mediante las funciones de distribución y la relación de éstas con las cópulas.

Definición 1.25. Si X es una variable aleatoria y a es un número real, se dice que X es *simétrica respecto a a* si las funciones de distribución de las variables $X - a$ y $a - X$ son la misma. Esto es equivalente a que $\mathbb{P}\{X - a \leq x\} = \mathbb{P}\{a - X \leq x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si X es continua con distribución F , entonces esto es equivalente a

$$F(a + x) = \overline{F}(a - x). \tag{1.90}$$

Definición 1.26. Sean X e Y variables aleatorias y sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- I. (X, Y) es *marginalmente simétrico* respecto a (a, b) si X e Y son simétricas respecto a a y b respectivamente.
- II. (X, Y) es *radialmente simétrico* respecto a (a, b) si la distribución conjunta de $(X - a, Y - b)$ es la misma que la distribución conjunta de $(a - X, b - Y)$.
- III. (X, Y) es *conjuntamente simétrico* respecto a (a, b) si los siguientes cuatro pares de variables aleatorias tienen una distribución conjunta igual: $(X - a, Y - b)$, $(X - a, b - Y)$, $(a - X, Y - b)$ y $(a - X, b - Y)$.

Lema 1.7. Dadas X e Y dos variables aleatorias, se verifica:

$$(X, Y) \begin{matrix} \text{conjuntamente} \\ \text{simétrico} \end{matrix} \Rightarrow (X, Y) \begin{matrix} \text{radialmente} \\ \text{simétrico} \end{matrix} \Rightarrow (X, Y) \begin{matrix} \text{marginalmente} \\ \text{simétrico} \end{matrix}. \tag{1.91}$$

Demostración. La primera implicación es trivial por la definición. La segunda se deduce tomando las marginales de $(X - a, Y - b)$ y de $(a - X, b - Y)$. □

Teorema 1.15 (Caracterización de la simetría radial). Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente. Sea (a, b) un punto en \mathbb{R}^2 . Entonces (X, Y) es **radialmente simétrico** respecto a (a, b) si y sólo si

$$H(a + x, b + y) = \overline{H}(a - x, b - y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.92}$$

Demostración. Si (X, Y) es radialmente simétrica,

$$H(a + x, b + y) = \mathbb{P}\{X \leq a + x, Y \leq b + y\} = \mathbb{P}\{X - a \leq x, Y - b \leq y\}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Def. 1.26}}{=} \mathbb{P}\{a - X \leq x, b - Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X \geq a - x, Y \geq b - y\} \\ &= \overline{H}(a - x, b - y). \end{aligned}$$

El recíproco es trivial:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X - a \leq x, Y - b \leq y\} &= H(a + x, b + y) = \overline{H}(a - x, b - y) \\ &= \mathbb{P}\{X \geq a - x, Y \geq b - y\} = \mathbb{P}\{a - X \leq x, b - Y \leq y\}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.16. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G respectivamente y cópula C . Supongamos que X e Y son simétricas respecto a a y b respectivamente. Entonces (X, Y) es **radialmente simétrica** respecto (a, b) si y sólo si $C = \widehat{C}$, es decir si y sólo si C satisface

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \tag{1.93}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H(a + x, b + y) &= \overline{H}(a - x, b - y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow C(F(a + x), G(b + y)) = \widehat{C}(\overline{F}(a - x), \widehat{G}(b - y)) \\ &\Leftrightarrow C(F(a + x), G(b + y)) = \widehat{C}(F(a + x), G(b + y)) \\ &\Leftrightarrow C(u, v) = \widehat{C}(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.17 (Caracterización de la simetría conjunta). Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente. Sea (a, b) un punto en \mathbb{R}^2 . Entonces (X, Y) es **conjuntamente simétrico** respecto a (a, b) si y sólo si se verifican

$$H(a + x, b + y) = F(a + x) - H(a + x, b - y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.94}$$

$$H(a + x, b + y) = G(b + y) - H(a - x, b + y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.95}$$

Demostración. Supongamos que (X, Y) es conjuntamente simétrico. Probamos sólo (1.94), (1.95) es análoga.

$$\begin{aligned} H(a + x, b + y) &= \mathbb{P}\{X \leq a + x, Y \leq b + y\} + \mathbb{P}\{X - a \leq x, Y - b > y\} \\ &\quad - \mathbb{P}\{X - a \leq x, Y - b > y\} = F(a + x) - \mathbb{P}\{X - a \leq x, b - Y < -y\} \\ &\stackrel{\text{Def. 1.26}}{=} F(a + x) - \mathbb{P}\{X - a \leq x, Y - b < -y\} \\ &= F(a + x) - \mathbb{P}\{X \leq x + a, Y < b - y\} = F(a + x) - H(x + a, b - y). \end{aligned}$$

Para el recíproco, llegará con probar:

$$(a) \mathbb{P} \{X - a \leq x, Y - b \leq y\} = \mathbb{P} \{X - a \leq x, b - Y \leq y\}.$$

$$(b) \mathbb{P} \{X - a \leq x, Y - b \leq y\} = \mathbb{P} \{a - X \leq x, Y - b \leq y\}.$$

$$(c) \mathbb{P} \{X - a \leq x, Y - b \leq y\} = \mathbb{P} \{a - X \leq x, b - Y \leq y\}.$$

Probamos sólo (a) y (c) por ser (b) análogo a (a). Para (a):

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{X - a \leq x, Y - b \leq y\} &= H(a + x, b + y) = F(a + x) - H(a + x, b - y) \\ &= \mathbb{P} \{X \leq a + x, Y \leq b - y\} + \mathbb{P} \{X \leq a + x, Y > b - y\} \\ &\quad - \mathbb{P} \{X \leq a + x, Y \leq b - y\} = \mathbb{P} \{X - a \leq x, b - Y \leq y\}. \end{aligned}$$

Para probar (c), usamos la siguiente igualdad, que se obtiene al aplicar (1.94) y después (1.95):

$$H(a + x, b + y) = G(b + y) - F(a - x) + H(a - x, b - y). \tag{1.96}$$

Así:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{a - X \leq x, b - Y \leq y\} &= \mathbb{P} \{X \geq a - x, Y \geq b - y\} \\ &= 1 - F(a - x) - G(b - y) + H(a - x, b - y) \\ &\stackrel{\text{Lema 1.7}}{=} G(b + y) - F(a - x) + H(a - x, b - y) \\ &\stackrel{(1.96)}{=} H(a + x, b + y) = \mathbb{P} \{X - a \leq x, Y - b \leq y\}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.18. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G respectivamente y cópula C . Supongamos que X e Y son simétricas respecto a a y b , respectivamente. Entonces (X, Y) es **conjuntamente simétrico** respecto (a, b) si y sólo si C satisface

$$C(u, v) = u - C(u, 1 - v) \text{ y } C(u, v) = v - C(1 - u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \tag{1.97}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H(a + x, b + y) &= F(a + x) - H(a + x, b - y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow C(F(a + x), G(b + y)) = F(a + x) + C(F(a + x), G(b - y)) \\ &\Leftrightarrow C(F(a + x), G(b + y)) = F(a + x) + C(F(a + x), 1 - G(b - y)) \\ &\Leftrightarrow C(u, v) = u - C(u, 1 - v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(a+x, b+y) &= G(b+y) - H(a-x, b+y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow C(F(a+x), G(b+y)) = G(b+y) + C(F(a-x), G(b+y)) \\
&\Leftrightarrow C(F(a+x), G(b+y)) = G(b+y) + C(1-F(a+x), G(b+y)) \\
&\Leftrightarrow C(u, v) = v - C(1-u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2.
\end{aligned}$$

□

Definición 1.27. Se dice que las variables X e Y son **intercambiables** si los vectores (X, Y) y (Y, X) tienen la misma distribución.

Definición 1.28. Se dice que la cópula C es *simétrica* si verifica

$$C(u, v) = C(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}^2. \quad (1.98)$$

Teorema 1.19. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G respectivamente y cópula C . Entonces X e Y son **intercambiables** si y sólo si $F = G$, y C es simétrica.

Demostración. Para que X e Y sean intercambiables, las distribuciones conjuntas de (X, Y) e (Y, X) , H_1 y H_2 , deben ser iguales. Por el Teorema de Sklar, basta con que $F = G$ y la cópula C asociada a X e Y sea *simétrica*:

$$H_1(x, y) = C(F(x), G(y)) = C(G(y), F(x)) = H_2(y, x). \quad (1.99)$$

□

Ejemplo 1.17. La familia de Fréchet es la familia dada por

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \alpha C^+(u, v) + (1 - \alpha - \beta) C^\perp(u, v) + \beta C^-(u, v), \quad (1.100)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ tales que $\alpha + \beta \leq 1$. Esta es una familia comprehensiva y radialmente simétrica, pues $\widehat{C}_{\alpha, \beta} = C_{\alpha, \beta}$, ya que las cópulas de supervivencia de C^- , C^+ y C^\perp son ellas mismas. Del mismo modo, toda familia que sea una combinación lineal de estas cópulas será también radialmente simétrica. Sin embargo, la familia de Fréchet no es conjuntamente simétrica, pues para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $(u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ no se verifica (1.97).

Un ejemplo de familia no simétrica es la familia de Cuadras–Augé, ya que $C_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \neq \widehat{C}_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. ◊

1.8. Orden

La desigualdad de Fréchet–Hoeffding, vista en (1.11), proporciona dos cotas para el conjunto de todas las cópulas posibles. Esto sugiere la definición de un orden en el conjunto de las cópulas.

Definición 1.29. Si C_1 y C_2 son cópulas, diremos que C_1 es *menor* que C_2 (o que C_2 es *mayor* que C_1), y escribiremos $C_1 \prec C_2$ (o $C_1 \prec C_2$) si $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$, $\forall (u, v) \in \mathbb{I}$ (o con \geq).

El orden \prec es *punto a punto* y se le suele denominar orden de *concordancia* (en el Capítulo 6 se explica el motivo de este nombre). Las cotas de Fréchet–Hoeffding se convierten en la menor y la mayor cópulas posibles con este orden. Sin embargo, hay un detalle muy importante: se trata de un **orden parcial y no total**. Por ejemplo, si consideramos la cópula formada por la combinación lineal entre W y M , $C(u, v) := \frac{W(u,v)+M(u,v)}{2}$, nos encontramos que esta cópula no es comparable con la cópula producto Π ,

$$C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{0 + 1/4}{2} > \frac{1}{16} = \Pi\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \tag{1.101}$$

$$C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{0 + 1/4}{2} < \frac{3}{16} = \Pi\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right). \tag{1.102}$$

Entonces $C \not\prec \Pi$ y $\Pi \not\prec C$ y no todo par de cópulas es comparable. Sin embargo, en ciertas familias de cópulas el orden puede ser total, y en ese caso tiene sentido definir si están ordenadas positiva o negativamente.

Definición 1.30. Una familia paramétrica de cópulas totalmente ordenada $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ se dice que es *ordenada positivamente* si $C_\alpha \prec C_\beta$ para $\alpha \leq \beta$. Si $C_\beta \prec C_\alpha$ para $\alpha \leq \beta$, se dice que está *ordenada negativamente*.

Ejemplo 1.18. Una familia de cópulas totalmente ordenada de forma positiva es la *familia de Ali–Mikhail–Haq*, presentada en el Ejemplo 1.4. Para probar que $C_\alpha(u, v) \leq C_\beta(u, v)$, $\forall (u, v) \in \mathbb{I}^2$, con $\alpha \leq \beta$ pertenecientes a $[-1, 1]$ derivamos C_θ en función de θ y vemos que es una función creciente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} C_\theta(u, v) &= \frac{d}{d\theta} \left[\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)} \right] \\ &= \frac{uv(1-u)(1-v)}{(1 - \theta(1-u)(1-v))^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Otra familia de cópulas ordenada de forma positiva es la de *Cuadras–Augé* (Ejemplo 1.5), ya que:

$$\frac{C_\alpha(u, v)}{C_\beta(u, v)} = \left(\frac{uv}{\min(u, v)} \right)^{\beta-\alpha} \leq 1. \tag{1.103}$$

Y por tanto $C_\alpha \prec C_\beta$. No todas las familias vistas hasta ahora están positiva o negativamente ordenadas, por ejemplo, la familia de *Mardia* vista en el Ejemplo 1.6 no está ordenada de ninguna de las dos formas (aunque está ordenada totalmente). Esto se ve con:

$$C_0\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = C_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{95}{512} \text{ y } C_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{96}{512}. \tag{1.104}$$

Entonces $C_0 \not\prec C_{\frac{1}{4}}$ y $C_{\frac{1}{2}} \not\prec C_{\frac{1}{4}}$, la familia no puede estar positiva ni negativamente ordenada. \diamond

Proposición 1.4. *Las operaciones cópula de supervivencia (\wedge) y función de supervivencia conjunta ($/$) preservan el orden de concordancia, mientras que dual de una cópula (\sim) y la co-cópula ($*$) lo alteran:*

$$C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow \widehat{C}_1 \prec \widehat{C}_2, \quad C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 \prec \mathcal{C}_2 \tag{1.105}$$

$$C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow \widetilde{C}_1 \succ \widetilde{C}_2, \quad C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow C_1^* \succ C_2^* \tag{1.106}$$

Demostración. Se comprueba para las operaciones \wedge y \sim , comprobarlo para $/$ y $*$ es análogo.

$$\begin{aligned} C_1 \prec C_2 &\Leftrightarrow C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2 \\ &\Leftrightarrow C_1(1 - u, 1 - v) \leq C_2(1 - u, 1 - v) \\ &\Leftrightarrow u + v - 1 + C_1(1 - u, 1 - v) \leq u + v - 1 + C_2(1 - u, 1 - v) \\ &\Leftrightarrow \widehat{C}_1 \prec \widehat{C}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 \prec C_2 &\Leftrightarrow C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2 \\ &\Leftrightarrow -C_1(u, v) \geq -C_2(u, v) \\ &\Leftrightarrow u + v - C_1(1 - u, 1 - v) \geq u + v - C_2(1 - u, 1 - v) \\ &\Leftrightarrow \widetilde{C}_1 \succ \widetilde{C}_2. \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Cóputas multivariantes

En este capítulo se extienden los resultados de las cóputas bivariantes al caso multivariante. La mayoría de las definiciones y teoremas son extensiones sencillas del caso bidimensional, aunque con una considerable complicación en la notación y en los detalles técnicos. Sin embargo, algunos resultados son distintos al caso bidimensional y hay que proceder con cautela. Por ello, nos centraremos en lo nuevo y omitiremos las demostraciones análogas a las del caso bidimensional y que presenten complicaciones técnicas. Estas demostraciones son debidamente citadas a las obras en que aparezcan, por ejemplo [72].

2.1. Definiciones, Teorema de Sklar y cotas de Fréchet–Hoeffding

Definición 2.1. Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función de n variables reales tal que $\text{Dom}H = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \overline{\mathbb{R}}^n$ tales que $\vec{a} \leq \vec{b}$ ¹ y $B = [\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un rectángulo n -dimensional cuyos vértices están en $\text{Dom}H$. Entonces el H -volumen de B se define como

$$V_H(B) := \sum_{\vec{c} \text{ vértice de } B} \text{sign}(\vec{c})H(\vec{c}), \quad (2.1)$$

donde la suma se realiza en todos los vértices distintos de B , es decir, en todos los $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ tal que $c_i = a_i$ o $c_i = b_i$. La función $\text{sign}(\vec{c})$ es

$$\text{sign}(\vec{c}) := \begin{cases} 1, & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número par de } k\text{'s} \\ -1, & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número impar de } k\text{'s} \end{cases}. \quad (2.2)$$

¹Es decir, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ y $a_k \leq b_k$ para $k = 1, \dots, n$.

Equivalentemente, el H -volumen del rectángulo B es la n -ésima diferencia de H en B pues

$$V_H(B) := \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} H(t) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} H(t), \tag{2.3}$$

donde definimos las n primeras diferencias de una función de n variables H como

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(t) := H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n). \tag{2.4}$$

Observación 2.1. Para $n = 2$, $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $\text{sign}(x_2, y_2) = \text{sign}(x_1, y_1) = 1$ y $\text{sign}(x_1, y_2) = \text{sign}(x_2, y_1) = -1$, con lo que resulta la Definición 1.1. \triangleleft

Definición 2.2. Una función de n variables reales H es n -creciente si $V_H(B) \geq 0$ para todos los n -rectángulos B cuyos vértices están en $\text{Dom}H$.

Definición 2.3. Si $S_1, \dots, S_m \subset \overline{\mathbb{R}}$ son no vacíos, diremos que la función $H : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *grounded* si, tomando $a_k = \inf S_k$, $k = 1, \dots, n$, se verifica que

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n \text{ con } x_k = a_k \text{ para algún } k. \tag{2.5}$$

Definición 2.4. Si $S_1, \dots, S_m \subset \overline{\mathbb{R}}$ son no vacíos y con $b_k = \sup S_k$, $k = 1, \dots, n$, diremos que la función $H : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene *marginales*. Las *marginales univariantes* o 1 -marginales son las funciones $H_k : x \in S_k \mapsto H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \in \mathbb{R}$. Las k -marginales se definen de forma similar, fijando varias posiciones en H .

Las demostraciones de los dos lemas siguientes se pueden ver en Schweizer y Sklar [72].

Lema 2.1. Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función de n variables reales *grounded* con dominio $S_1 \times \cdots \times S_n$. Entonces H es no decreciente en cada argumento, es decir, si $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ y $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$ están en $\text{Dom}H$ y $x < y$, entonces $H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$.

Lema 2.2. Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función de n variables reales, **grounded**, n -creciente y con marginales cuyo dominio es $S_1 \times \cdots \times S_n$. Sean (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) puntos en $S_1 \times \cdots \times S_n$. Entonces

$$|H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|. \tag{2.6}$$

Definición 2.5. Una *subcópula n -dimensional* (o n -**subcópula**) es una función C' con las siguientes propiedades:

- I. $\text{Dom}C' = S_1 \times \cdots \times S_n$, donde cada S_k es un subconjunto de \mathbb{I} que contiene a 0 y 1.

- II. C' es grounded y es n -creciente.
- III. $\forall u_k \in S_k, C'(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$, para $k = 1, \dots, n$.

Observación 2.2. Notemos que $\forall \vec{u} \in \text{Dom}C', 0 \leq C'(\vec{u}) \leq 1$, así que $\text{Ran}C'$ es también un subconjunto de \mathbb{I} . ◁

Definición 2.6. Una *cópula n -dimensional* o *n -cópula* es una función $C : \mathbb{I}^n \mapsto \mathbb{I}$ con las siguientes propiedades:

- I. $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{I}^n, C(u_1, \dots, u_n) = 0$ si algún $u_k = 0, k = 1, \dots, n$.
- II. $\forall (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{I}^n, C(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k, k = 1, \dots, n$.
- III. (C es n -creciente) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{I}^n$ tal que $\vec{a} \leq \vec{b}, V_C \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right) \geq 0$.

Equivalentemente, una n -cópula es una n -subcópula C cuyo dominio es \mathbb{I}^n .

Ejemplo 2.1. Las extensiones de las 2-cópulas a M, Π y W a la dimensión n son:

$$M^n(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n), \tag{2.7}$$

$$\Pi^n(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdots u_n, \tag{2.8}$$

$$W^n(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \cdots + u_n - n + 1, 0). \tag{2.9}$$

M^n y Π^n son n -cópulas para $n \geq 2$. Lo único complicado es comprobar que son n -crecientes y esto se ve fácilmente teniendo en cuenta que [72]:

$$V_{M^n} \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right) = \max(\min(b_1, \dots, b_n) - \max(a_1, \dots, a_n), 0) \geq 0,$$

$$V_{\Pi^n} \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \geq 0.$$

En la Proposición 2.2 se ve que W^n generalmente no es una n -cópula. ◊

Proposición 2.1. Si C es una n -cópula, con $n \geq 2$, entonces para cualquier $k, 2 \leq k \leq n$, todas las $\binom{n}{k}$ k -marginales de C son k -cópulas.

Demostración. Es un procedimiento de inducción. Empezaremos por probar que todas las $(n - 1)$ -marginales de una n -cópula son $(n - 1)$ -cópulas. Denotaremos por

$$C_k(\vec{v}) = C_{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

$$= C(u_1, \dots, u_{k-1}, 1, u_{k+1}, \dots, u_n), \quad \vec{v} = (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

a las distintas $(n - 1)$ -marginales de C , con $k = 1, \dots, n$. Veamos que son $(n - 1)$ -cópulas:

- I. $C_k(\vec{v}) = C(v_1, \dots, v_{k-1}, 1, v_k, \dots, v_{n-1}) = 0$ si algún $v_s = 0, s = 1, \dots, n - 1$.

II. $C_{\vec{k}}(1, \dots, v_s, \dots, 1) = C(1, \dots, v_s, \dots, 1) = v_s, s = 1, \dots, n - 1.$

III. Para ver que $C_{\vec{k}}$ es $(n - 1)$ -creciente, consideremos el n -rectángulo $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y los puntos $\vec{c} = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$ y $\vec{d} = (b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k+1}, \dots, b_n)$. Usando que C es n -creciente:

$$\begin{aligned} V_C(B) &= \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \Delta_0^1 \Delta_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(u_1, \dots, u_n) \\ &= \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \left[\Delta_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(u_1, \dots, u_{k-1}, 1, u_{k+1}, \dots, u_n) \right. \\ &\quad \left. - \Delta_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n) \right] \\ &= \Delta_{a_n}^{b_n} \dots \Delta_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \Delta_{a_{k+1}}^{b_{k+1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(u_1, \dots, 1, \dots, u_n) \\ &= \Delta_{c_{n-1}}^{d_{n-1}} \dots \Delta_{c_1}^{d_1} C_{\vec{k}}(\vec{v}) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto el $C_{\vec{k}}$ -volumen de cualquier $(n - 1)$ -rectángulo $B' = [\vec{c}, \vec{d}]$ es no negativo y así $C_{\vec{k}}$ es $(n - 1)$ -creciente.

Las $(n - 2)$ -marginales de C se pueden ver como las $((n - 1) - 1)$ marginales de $C_{\vec{k}}$, con $k = 1, \dots, n$ y aplicando lo probado, serán $(n - 2)$ -cópulas. Procediendo de esta forma, se prueba que para todo $2 \leq k \leq n$, las k -marginales de C son k -cópulas. Además, como estamos combinando n elementos en grupos de k elementos (sin repetición), el número de k -marginales es $\binom{n}{k}$. □

Ejemplo 2.2. Sea $C(u, v, w) = w \min(u, v)$. C es una 3-cópula pues verifica I y II de forma trivial y el C -volumen del 3-rectángulo $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ es

$$\begin{aligned} V_C(B) &= \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} C(u, v, w) = (b_3 - a_3) \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} \min(u, v) \\ &= (b_3 - a_3) (b_1 - \min(a_1, b_2) - \min(b - 1, a_2) + a_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Las 2-marginales de C son $C_{1,2}(u, v) = C(u, v, 1) = \min(u, v) = M(u, v)$, $C_{1,3}(u, v) = C(u, 1, w) = w \min(u, 1) = \Pi(u, w)$ y $C_{2,3}(u, v) = C(1, v, w) = w \min(1, v) = \Pi(v, w)$. ◇

Ejemplo 2.3. Sea $C(u, v, w) = \min(u, v) - \min(u, v, 1 - w)$. C es una 3-cópula, aunque probar que es 3-creciente es algo complicado.

Sus 2-marginales son $C_{1,2}(u, v) = C(u, v, 1) = M(u, v)$, $C_{1,3}(u, v) = u - \min(u, 1 - w) = W(u, w)$ y $C_{2,3}(u, v) = v - \min(v, 1 - w) = W(v, w)$. ◇

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del Lema 2.2.

Teorema 2.1. Sea C' una n -subcópula. Entonces para todo (u_1, \dots, u_n) y (v_1, \dots, v_n) en $DomC'$,

$$|C'(u_1, \dots, u_n) - C'(v_1, \dots, v_n)| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|. \tag{2.10}$$

Por lo tanto C' es uniformemente continua en su dominio.

Las n -cópulas tendrán derivadas parciales k -ésimas para $1 \leq k \leq n$ casi por doquier en \mathbb{I}^n [8] y verificarán que

$$0 \leq \frac{\partial^k C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} \leq 1. \tag{2.11}$$

La demostración sería una extensión del Teorema 1.4, pero más compleja.

Definición 2.7. Una *función de distribución n -dimensional* es una función H con dominio $\overline{\mathbb{R}}^n$ tal que:

- I. H es n -creciente.
- II. $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ tal que $t_k = -\infty$, $H(t_1, \dots, t_n) = 0$ y $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.
- III. H es continua por la derecha en cada variable.

Ya estamos preparados para presentar el Teorema de Sklar multidimensional, que como el bidimensional, se demuestra mediante dos lemas: uno que lo pruebe para subcópulas y otro que extienda las subcópulas a cópulas. La prueba del primer lema es sencilla y se puede ver en [72], pero la del segundo requiere muchos cálculos y es bastante extensa. Su demostración se puede ver en [76]. Otra prueba independiente de la de Sklar se debe a M.C. Spruill [56]. Es una demostración probabilística y no hace referencia a las cópulas. La demostración del resto del teorema y del Corolario 2.1 se puede ver en [72].

Lema 2.3. *Sea H una distribución n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n . Entonces existe una **única** n -subcópula C' tal que*

- I. $DomC' = RanF_1 \times \cdots \times RanF_n$.
- II. $\forall x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}}, H(x_1, \dots, x_n) = C'(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.

Lema 2.4 (Extensión de una n -subcópula a una n -cópula). *Sea C' una n -subcópula. Entonces existe una n -cópula C tal que*

$$C(u_1, \dots, u_n) = C'(u_1, \dots, u_n), \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in DomC'. \tag{2.12}$$

La extensión no es única generalmente.

Teorema 2.2 (Teorema de Sklar n -dimensional). *Sea H una distribución n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n . Entonces existe una n -cópula C tal que*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n. \tag{2.13}$$

Si F_1, \dots, F_n son todas continuas, entonces C es única. En otro caso, C está unívocamente determinada en $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$. recíprocamente, si C es una n -cópula y F_1, \dots, F_n son distribuciones univariantes, entonces la función H definida por (2.13) es una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n .

Corolario 2.1. Sean H, C y F_1, \dots, F_n como en el Teorema de Sklar y sean $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ las quasi-inversas de F_1, \dots, F_n respectivamente. Entonces se cumple que

$$C(u_1, \dots, u_n) = H\left(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)\right), \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{I}^n. \quad (2.14)$$

Al igual que en el caso bidimensional, el Teorema de Sklar admite una formulación en términos de variables aleatorias.

Teorema 2.3. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con funciones de distribución F_1, \dots, F_n , respectivamente, y función de distribución conjunta H . Entonces existe una cópula tal que se verifica (2.13). Si F_1, \dots, F_n son continuas, C es única. En otro caso, C está unívocamente determinada sólo en $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$.

Las cotas de Fréchet–Hoeffding van a ser análogas a las del caso bidimensional, aunque W^n **no es una n -cópula**, lo que limita su utilidad. W^n no es una cópula para $n > 2$ porque **la dependencia perfecta negativa no es generalizable para más de dos variables aleatorias**, a diferencia de la positiva.

Un sencillo contraejemplo se obtiene considerando un conjunto de tres variables aleatorias X, Y y Z , que sean dependientes perfectas negativas (cada una de cada una de las restantes). Entonces cada variable es una función decreciente de cada una de las restantes. Por ejemplo, $Z = f(X)$ y $Z = g(Y)$ con f y g funciones no crecientes, con lo que $f(X) = g(Y)$. Pero además, $Y = h(X)$ con h no creciente, con lo que tenemos $f(X) = (g \circ h)(X)$, lo que es un absurdo (salvo en el caso degenerado) pues $g \circ h$ es una función no decreciente. Kettler [40] propone una extensión de W a cópulas multivariantes que salve este problema. Como para $(U_1, U_2) \sim W$ se tiene que $U_1 + U_2 = 1$, la idea es buscar una cópula C_\downarrow tal que si $(U_1, \dots, U_n) \sim C_\downarrow$ se verifique $U_1 + \dots + U_n = 1$, es decir, que haya una *dependencia complementaria* entre U_1, \dots, U_n . Esta dependencia sería inversa cuando $n = 2$, coincidiendo en ese caso C_\downarrow con W y el concepto de dependencia perfecta negativa.

Teorema 2.4 (Desigualdad de Fréchet–Hoeffding). Si C' es una n -subcópula cualquiera, entonces:

$$W^n(\vec{u}) \leq C'(\vec{u}) \leq M^n(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \text{Dom}C'. \quad (2.15)$$

Demostración. Sea $(u_1, \dots, u_n) \in \text{Dom}C'$.

Como C' es no decreciente en cada argumento, para $k = 1, \dots, n$ se cumple $C'(u_1, \dots, u_n) =$

$C'(1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$, con lo cual $C'(u_1, \dots, u_n) \leq \min(u_1, \dots, u_n)$. Para la cota inferior, usamos el Lema 2.2:

$$1 - C'(u_1, \dots, u_n) = |C'(1, \dots, 1) - C'(u_1, \dots, u_n)| \leq \sum_{k=1}^n |1 - u_k| = n - \sum_{k=1}^n u_k.$$

Como $C'(u_1, \dots, u_n) \geq 0$, $C'(u_1, \dots, u_n) \geq \max(\sum_{k=1}^n u_k - n + 1, 0)$. □

Proposición 2.2. *Para todo $n > 2$, W^n no es una cópula.*

Demostración. Consideremos el n -cubo $[\frac{1}{2}, 1]^n$ y calculemos su volumen para ver que W^n no es 2-creciente:

$$\begin{aligned} W^n \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right]^n \right) &= W^n(1, 1, \dots, 1) - nW^n \left(\frac{1}{2}, 1, \dots, 1 \right) \\ &\quad + \binom{n}{2} W^n \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 1 \right) + \dots + W^n \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{n}{2} + 0 + \dots + 0 = 1 - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $n > 2$, el volumen es negativo pues $1 - \frac{n}{2} < 0$ y W^n no puede ser una cópula. □

Aunque W^n no es una cópula para $n > 2$, la cota es la mejor posible: siempre existe una cópula que alcanza su valor en un punto determinado, como se puede ver en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Para cualquier $n > 2$ y cualquier $\vec{u} \in \mathbb{I}^n$, existe una n -cópula $C_{\vec{u}}$ (que depende de \vec{u}), para la cual $C_{\vec{u}}(\vec{u}) = W^n(\vec{u})$.*

Demostración. Sea $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un punto fijo de \mathbb{I}^n que no sea $(0, \dots, 0)$ ni $(1, \dots, 1)$. Consideraremos dos casos:

I. Supongamos que $0 < u_1 + \dots + u_n \leq n - 1$.

Consideremos el conjunto de puntos $\{(v_1, \dots, v_n) : v_k = 0, 1 \text{ o } t_k \text{ para } k = 1, \dots, n\}$, con $t_k = \min\left(\frac{(n-1)u_k}{u_1 + \dots + u_n}, 1\right)$. Se define una función $C'_{\vec{u}}$ en estos puntos mediante $C'_{\vec{u}}(\vec{v}) := W^n(\vec{v})$. Se puede ver que $C'_{\vec{u}}$ es una n -subcópula. Entonces podemos extender $C'_{\vec{u}}$ a una n -cópula $C_{\vec{u}}$ mediante una “interpolación multilineal” análoga a la del Lema 1.5 (ver Apéndice A). Así, para todo $\vec{x} \in [\vec{0}, \vec{t}]$, con $\vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$, incluyendo a \vec{u} , $C_{\vec{u}}(\vec{x}) = W^n(\vec{x})$.

II. Supongamos que $n - 1 < u_1 + \dots + u_n$.

Consideremos el conjunto de puntos $\{(v_1, \dots, v_n) : v_k = 0, 1 \text{ o } s_k \text{ para } k = 1, \dots, n\}$, con $s_k = 1 - \frac{1-u_k}{n-(u_1+\dots+u_n)}$. Se define una función $C'_{\vec{u}}$ en estos puntos mediante

$C'_u(\vec{v}) := W^n(\vec{v})$. C'_u es una n -subcópula y se puede extender como antes a una n -cópula C_u . Así, para todo $\vec{x} \in [\vec{s}, \vec{1}]$, con $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$, incluyendo a u , $C_u(\vec{x}) = W^n(\vec{x}) = x_1 + \dots + x_n - n + 1$.

□

El siguiente teorema caracteriza a Π y M como las cópulas asociadas a la *independencia* y a la *comonotonía*. Para la demostración del segundo punto puede ser interesante ver [15].

Teorema 2.6. *Para $n \geq 2$, sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con distribuciones continuas. Entonces:*

- I. X_1, \dots, X_n son independientes si y sólo si la n -cópula de X_1, \dots, X_n es Π^n .
- II. Cada una de las variables aleatorias X_1, \dots, X_n es casi seguro una función estrictamente creciente del resto si y sólo si la n -cópula de X_1, \dots, X_n es M^n .

Como en el caso bidimensional, las cópulas son invariantes frente a transformaciones estrictamente crecientes (es suficiente con que lo sean en casi todo punto). Su demostración es análoga.

Teorema 2.7. *Para $n \geq 2$, sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con distribuciones continuas y cópula C_{X_1, \dots, X_n} . Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son funciones estrictamente crecientes de \mathbb{R} en \mathbb{R} , entonces*

$$C_{\alpha(X_1), \dots, \alpha(X_n)} = C_{X_1, \dots, X_n}. \tag{2.16}$$

2.2. Componentes y densidad de una cópula multivariante

Definición 2.8. La *densidad* c asociada a la n -cópula C es

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} \tag{2.17}$$

La densidad existe en casi todo \mathbb{I}^n , tal y como se veía en (2.11).

Definición 2.9. Dada la n -cópula C , denotaremos por A_C a la *componente absolutamente continua*

$$A_C(u_1, \dots, u_n) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n C(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} dt_n \cdots dt_1. \tag{2.18}$$

y por S_C a la *componente singular*

$$S_C(u_1, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n) - A_C(u_1, \dots, u_n). \quad (2.19)$$

Una cópula para la que $C = A_C$ en \mathbb{I}^n se denomina *absolutamente continua* y se dice *singular* si $C = S_C$ en \mathbb{I}^2 .

Cuando no es absolutamente continua ni singular, se dice que tiene una componente absolutamente continua y una componente singular, y se puede descomponer según

$$C = A_C + S_C. \quad (2.20)$$

En este caso, ni A_C ni S_C serán cópulas.

Supongamos que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias absolutamente continuas, con distribución conjunta F , densidad conjunta f , distribuciones marginales F_1, \dots, F_n y densidades marginales f_1, \dots, f_n . Si C es la n -cópula asociada F , entonces la densidad conjunta f admite la siguiente **representación canónica**:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{j=1}^n f_j(x_j). \quad (2.21)$$

A veces es útil expresar c como

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{\prod_{j=1}^n f_j(F_j^{-1}(u_j))}. \quad (2.22)$$

En los siguientes ejemplos se ve la aplicación de (2.22) para calcular la densidad de una cópula.

Ejemplo 2.4. *Cópula Gaussiana multivariante.* Sea R una matriz simétrica definida positiva con unos en la diagonal y Φ_R la distribución de la normal multivariante estandarizada² con matriz de correlación R . La n -cópula Gaussiana se define como

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)). \quad (2.23)$$

Notemos que se usa la matriz de correlación R en vez de la de varianza Σ porque queremos estar en un contexto estandarizado, sin depender de los rangos de las variables aleatorias. Mediante la definición de la cópula C_R^{Ga} y la representación canónica, podemos calcular

²Con media cero.

la densidad c_R^{Ga} :

$$c_R^{Ga}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{x}^T R^{-1} \vec{x}\right)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_j^2\right)\right)}. \quad (2.24)$$

Si denotamos $u_j = \Phi(x_j)$ y $\vec{\zeta} = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$, tenemos la representación

$$c_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{\zeta}^T (R^{-1} - I) \vec{\zeta}\right). \quad (2.25)$$

Los parámetros asociados a dicha cópula son las diferentes entradas de R , que debido a su simetría son $\binom{n}{2}$. Cada uno de estos parámetros mide la dependencia (en términos de correlación) entre las variables U_1, \dots, U_n . Además, como estamos con normalidad, correlación cero equivale a independencia. \diamond

Ejemplo 2.5. *Cópula t de Student multivariante.* Si R es una matriz de correlaciones, se define la *distribución multivariante t de Student estandarizada con matriz de correlación R y ν grados de libertad* como

$$T_{R,\nu}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right) |R|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \vec{x}^T R^{-1} \vec{x}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (2.26)$$

Si $X \sim T_{R,\nu}$, X admite la representación estocástica

$$X \stackrel{d}{=} \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Z \quad \text{con } Z \sim N_n(0, R) \text{ y } S \sim \chi_\nu^2. \quad (2.27)$$

Esta representación, generalización del caso univariante, será útil para simular $C_{R,\nu}^t$. Si T_ν denota la distribución univariante t de Student con ν grados de libertad, la cópula de Student multivariante se define como

$$C_{R,\nu}^t(u_1, \dots, u_n) = T_{R,\nu}^t(T_\nu^{-1}(u_1), \dots, T_\nu^{-1}(u_n)). \quad (2.28)$$

Denotando $\zeta_j = T_\nu(x_j)$ y $\vec{\zeta} = (T_\nu^{-1}(u_1), \dots, T_\nu^{-1}(u_n))^T$, su densidad, por la representación canónica, es

$$c_{R,\nu}^t(u_1, \dots, u_n) = |R|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\right)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu} \vec{\zeta}^T R^{-1} \vec{\zeta}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\zeta_j^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}. \quad (2.29)$$

\diamond

2.3. Cópulas multivariantes de supervivencia

Las cópulas multivariantes de supervivencia se complican con respecto a las bivariantes. Esto es consecuencia de que las funciones de supervivencia conjunta no tienen una expresión sencilla con respecto a la función de distribución conjunta y sus marginales. Por eso es preferible definir la n -cópula de supervivencia \widehat{C} mediante el Teorema de Sklar, enunciado en términos de supervivencia.

Definición 2.10. La n -cópula de supervivencia de las variables aleatorias X_1, \dots, X_n , con distribución conjunta F y marginales F_1, \dots, F_n , es la única cópula \widehat{C} en $\text{Ran}\overline{F}_1 \times \dots \times \text{Ran}\overline{F}_n$ tal que

$$\overline{F}(x_1, \dots, x_n) = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_n(x_n)). \tag{2.30}$$

Esta cópula está dada por el Teorema de Sklar para funciones de supervivencia [33].

De este modo, la existencia de \widehat{C} está asegurada. Lo que queremos ahora es ver la relación con la cópula C asociada a las variables X_1, \dots, X_n .

Definición 2.11. La función de supervivencia conjunta del vector aleatorio (U_1, \dots, U_n) , formado por variables uniformes y con cópula C se denota por \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{P}\{U_1 > u_1, \dots, U_n > u_n\}. \tag{2.31}$$

El siguiente teorema se encuentra demostrado en [33] y manifiesta la relación compleja entre \widehat{C} y C cuando la dimensión n aumenta.

Teorema 2.8. La n -cópula de supervivencia \widehat{C} se puede escribir en términos de la n -cópula C correspondiente:

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u_1, \dots, u_n) &= \mathcal{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n) \\ &= \sum_{i=0}^n \left[(-1)^i \sum_{\vec{w}(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{Z}(n-i, n, 1)} C(1 - w_1, \dots, 1 - w_n) \right], \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\mathcal{Z}(n - i, n, 1)$ es el conjunto de $\binom{n}{i}$ posible vectores con $n - i$ componentes iguales a 1 e i componentes iguales a u_i , para $i = 1, \dots, n$. La función de supervivencia \mathcal{C} se expresa como

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \left[(-1)^i \sum_{\vec{w}(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{Z}(n-i, n, 1)} C(w_1, \dots, w_n) \right]. \tag{2.33}$$

Además, de forma simétrica, la n -cópula C se puede escribir en términos de \widehat{C} :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \left[(-1)^i \sum_{\vec{w}(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{Z}(n-i, n, 1)} \widehat{C}(1 - w_1, \dots, 1 - w_n) \right]. \quad (2.34)$$

Ejemplo 2.6. Usando el teorema anterior, vamos a calcular \mathcal{P} y \widehat{C} para una 3-cópula C :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u_1, u_2, u_3) &= \sum_{i=0}^3 \left[(-1)^i \sum_{\vec{w}(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{Z}(3-i, 3, 1)} \widehat{C}(w_1, w_2, w_3) \right] \\ &= C(1, 1, 1) - C(u_1, 1, 1) - C(1, u_2, 1) - C(1, 1, u_3) \\ &\quad + C(u_1, u_2, 1) + C(u_1, 1, u_3) + C(1, u_2, u_3) - C(u_1, u_2, u_3) \\ &= 1 - u_1 - u_2 - u_3 + C_{12}(u_1, u_2) + C_{13}(u_1, u_3) \\ &\quad + C_{23}(u_2, u_3) - C(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u_1, u_2, u_3) &= \mathcal{P}(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3) \\ &= -2 + u_1 + u_2 + u_3 + C_{12}(1 - u_1, 1 - u_2) + C_{13}(1 - u_1, 1 - u_3) \\ &\quad + C_{23}(1 - u_2, 1 - u_3) - C(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3). \end{aligned} \quad (2.36)$$

◇

Proposición 2.3. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con distribuciones marginales F_1, \dots, F_n y cópula asociada C . Entonces:

$$M = \max(X_1, \dots, X_n) \sim F_M(\cdot) = C(F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)), \quad (2.37)$$

$$m = \min(X_1, \dots, X_n) \sim F_m(\cdot) = 1 - \widehat{C}(\overline{F}_1(\cdot), \dots, \overline{F}_n(\cdot)). \quad (2.38)$$

2.4. Orden

Se puede definir un orden parcial en el conjunto de las n -cópulas mediante comparaciones *punto a punto*.

Definición 2.12. Se dice que la n -cópula C_1 es *menor* que la n -cópula C_2 y se denota por $C_1 \prec C_2$ si, para todo $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{I}^n$, se cumple

$$C_1(u_1, \dots, u_n) \leq C_2(u_1, \dots, u_n) \text{ y } \mathcal{P}_1(u_1, \dots, u_n) \leq \mathcal{P}_2(u_1, \dots, u_n). \quad (2.39)$$

Observación 2.3. En el caso bidimensional, la definición se reducía a la primera condición ya que $C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \Leftrightarrow \mathcal{C}'_1(u, v) \leq \mathcal{C}'_2(u, v)$ por $\mathcal{C}'(u, v) = 1 - u - v + C(u, v)$. \triangleleft

Ejemplo 2.7. ¿Es toda cópula C es menor que la cota superior de Fréchet–Hoeffding, C^+ ? Es decir, ¿se cumple que $C \prec M$? Como $C(\vec{u}) \leq C^+(\vec{u})$ se cumple para todo $\vec{u} \in \mathbb{I}^n$, tenemos que ver si $\mathcal{C}'(\vec{u}) \leq \mathcal{C}'^+(\vec{u})$. Por (2.35),

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'(u_1, u_2, u_3) &= 1 - u_1 - u_2 - u_3 + C_{12}(u_1, u_2) + C_{13}(u_1, u_3) \\ &\quad + C_{23}(u_2, u_3) - C(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Entonces, $\mathcal{C}'(\vec{u}) \leq \mathcal{C}'^+(\vec{u})$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} &1 - u_1 - u_2 - u_3 + C_{12}(u_1, u_2) + C_{13}(u_1, u_3) + C_{23}(u_2, u_3) - C(u_1, u_2, u_3) \\ &\leq 1 - u_1 - u_2 - u_3 + \min(u_1, u_2) + \min(u_1, u_3) + \min(u_2, u_3) - \min(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Es decir, si y sólo si:

$$\begin{aligned} &C_{12}(u_1, u_2) + C_{13}(u_1, u_3) + C_{23}(u_2, u_3) - C(u_1, u_2, u_3) \leq \\ &\min(u_1, u_2) + \min(u_1, u_3) + \min(u_2, u_3) - \min(u_1, u_2, u_3). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Como las 2–marginales son cópulas $C_{ij}(u_i, u_j) \leq \min(u_i, u_j)$ y también $C(u_1, u_2, u_3) \leq \min(u_1, u_2, u_3)$, no se puede concluir que $\mathcal{C}'(\vec{u}) \leq \mathcal{C}'^+(\vec{u})$.

Sí se puede probar que $\Pi \prec C^+$. Supongamos que $u_1 \leq u_2 \leq u_3$, lo cual no es restricción, debido a la simetría de las componentes. Cambiando en (2.41) $\min(u_1, u_2, u_3)$ y $C(u_1, u_2, u_3)$ de lado, tenemos que el lado izquierdo es:

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 - u_1u_2u_3 + \min(u_1, u_2, u_3) \leq u_1 + u_1 + u_2 + u_1 = 3u_1 + u_2 \tag{2.42}$$

y el lado derecho,

$$2u_1 + 2u_2 \leq u_1 + u_1 + u_2 + \Pi(u_1, u_2, u_3). \tag{2.43}$$

Como $u_1 \leq u_2$, $3u_1 + u_2 \leq 2u_1 + 2u_2$ y (2.41) se cumple. Entonces $\Pi(\vec{u}) \leq \mathcal{C}'^+(\vec{u})$. \diamond

Capítulo 3

Construcción de cópulas

En este capítulo se exponen las principales técnicas usadas para construir cópulas. Los métodos están centrados en la construcción de 2-cópulas, aunque en el último apartado se comentan algunas formas de construir n -cópulas y los problemas que aparecen en este contexto.

3.1. Método de inversión

El método de inversión hace uso del Corolario 1.2 para construir la *única* cópula C a partir de la distribución conjunta F y las distribuciones marginales **continuas** F_1 y F_2 ,

$$C(u, v) = F(F_1^{(-1)}(u), F_2^{(-1)}(v)). \quad (3.1)$$

Con esta cópula C se pueden construir nuevas distribuciones bivariantes con marginales F'_1 y F'_2 , definiendo

$$F'(x, y) := C(F'_1(x), F'_2(y)). \quad (3.2)$$

Esta misma técnica se puede aplicar usando funciones de supervivencia, en cuyo caso hay que aplicar el Corolario 1.3 y obtener la cópula de supervivencia

$$\widehat{C}(u, v) = \overline{F}(\overline{F}_1^{(-1)}(u), \overline{F}_2^{(-1)}(v)). \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.1. Consideremos la distribución dada por

$$F(x, y) = \exp \left\{ - \left(e^{-x} + e^{-y} - (e^{\theta x} + e^{\theta y})^{-\frac{1}{\theta}} \right) \right\}, \quad (3.4)$$

con $\theta \geq 0$. Sus marginales son $F_1(x) = F(x, \infty) = \exp\{-e^{-x}\}$ y $F_1(y) = F(\infty, y) = \exp\{-e^{-y}\}$. Además, son invertibles por lo que $F_i^{-1}(u_i) = -\log(-\log u_i)$, $i = 1, 2$. Enton-

ces la cópula C_θ asociada es

$$C_\theta(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ [(-\log u_1)^{-\theta} + (-\log u_2)^{-\theta}]^{-\frac{1}{\theta}} \right\}. \quad (3.5)$$

A esta familia de cópulas se la conoce como la *familia de Gumbel–Barnett*.

Notemos que θ es un parámetro para modelar la dependencia, pues no aparece en las distribuciones marginales y sí en la conjunta. \diamond

El problema de este método es que se **requiere la distribución conjunta para deducir la cópula**. Eso limita la utilidad del método de inversión en las aplicaciones, porque normalmente lo que se desconoce es la función de distribución.

3.2. Métodos geométricos

Los métodos geométricos tratan de construir cópulas con determinados aspectos geométricos, como el soporte o las secciones horizontales, verticales y diagonales. También tratan de obtener cópulas a partir de otras mediante combinaciones convexas y mixturas.

3.2.1. Construcción de cópulas singulares

En esta sección se trata la construcción de cópulas singulares cuyo soporte es un determinado conjunto. Hasta ahora, las cópulas singulares con las que hemos trabajado eran las cotas de Fréchet–Hoeffding W y M . Su soporte era la segunda diagonal de \mathbb{I}^2 y la diagonal de \mathbb{I}^2 , respectivamente. Lo que se quiere hacer ahora es fijar un soporte para la cópula singular, atendiendo a su representación gráfica, y obtener la expresión de dicha cópula usando simplemente su definición y las propiedades del C -volumen, fundamentalmente

$$C(u, v) = V_C([0, v] \times [0, v]), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \quad (3.6)$$

El método se explica con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2. Supongamos que queremos descomponer la masa de probabilidad en dos segmentos de forma uniforme, un segmento uniendo $(0, \theta)$ y $(\theta, 0)$ con masa θ y otro segmento uniendo $(\theta, 1)$ con $(1, \theta)$ con masa de $1 - \theta$, siendo $\theta \in [0, 1]$. Notemos que $C_0 = C_1 = W$. El soporte se puede ver en la primera gráfica de la Figura 3.1.

Para obtener la expresión de la cópula C_θ , vamos a ir calculando la expresión para las regiones de \mathbb{I}^2 que aparecen en la Figura 3.1:

- I. En este caso $V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) = V_{C_\theta}([0, 0] \times [0, 0]) = 0$, porque no se corta ningún segmento con probabilidad positiva. Por lo tanto $C(u, v) = 0$.
- II. $V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) = V_{C_\theta}([0, u] \times [0, 1]) = u$, con lo que $C_\theta(u, v) = u$.

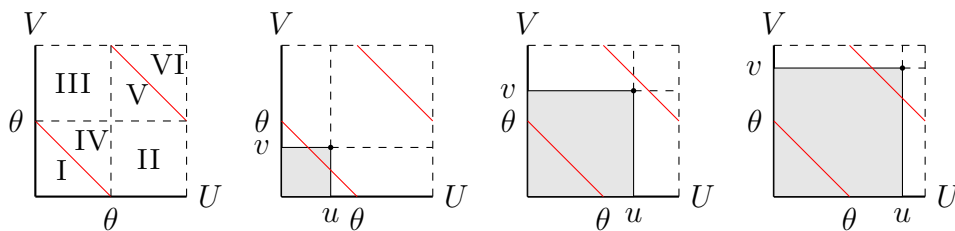


Figura 3.1: Construcción de una cópula singular.

III. $V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) = V_{C_\theta}([0, 1] \times [0, v]) = v$, con lo que $C_\theta(u, v) = v$.

IV. Esta situación se recoge en la segunda gráfica y para calcular el volumen, se utiliza que $V_{C_\theta}([u, 1] \times [v, 1]) = 1 - \theta$, pues el rectángulo con bordes discontinuos contiene al segmento de probabilidad $1 - \theta$. De esta forma,

$$\begin{aligned} 1 - \theta &= V_{C_\theta}([u, 1] \times [v, 1]) = C_\theta(1, 1) - C_\theta(u, 1) - C_\theta(1, v) + C_\theta(u, v) \\ &= 1 - u - v + C_\theta(u, v). \end{aligned}$$

Y así $C_\theta(u, v) = u + v - \theta$.

v. En este caso $C_\theta(u, v) = \theta$, porque contiene al segmento inferior y no al superior.

VI. Aquí se razona de forma similar al caso IV. Como $V_{C_\theta}([u, 1] \times [v, 1]) = 0$, desarrollando la expresión nos queda $C_\theta(u, v) = u + v - 1$.

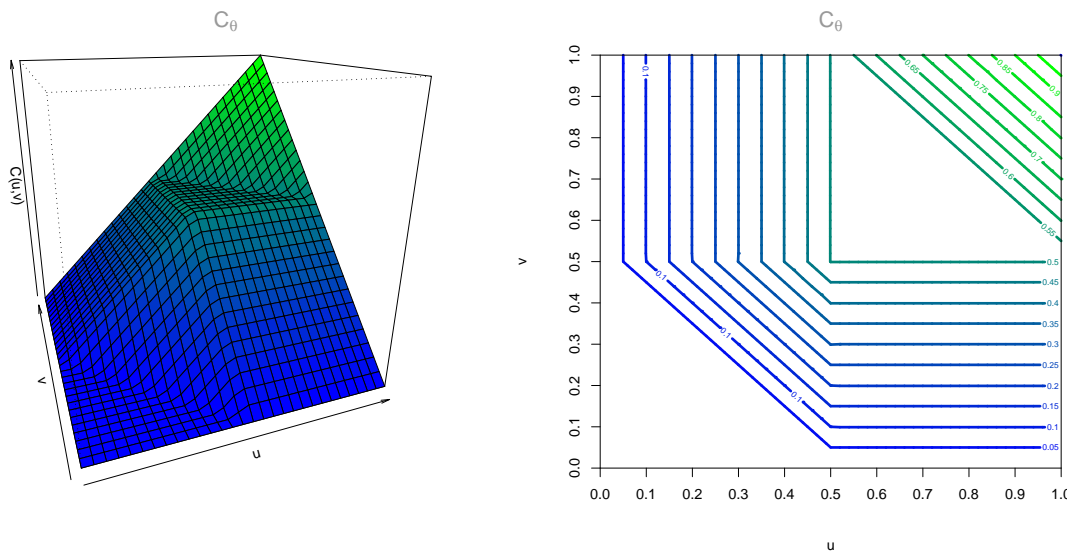


Figura 3.2: Cópula singular C_θ con soporte $[(0, \theta), (\theta, 0)] \cup [(\theta, 1), (1, \theta)]$ para $\theta = 0.5$.

Ahora juntamos las regiones en los rectángulos $[0, \theta]^2$, $[\theta, 1]^2$ y $\text{II} \cup \text{III}$ y ya tenemos la expresión para C_θ de una forma compacta:

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} \text{máx}(0, u + v - \theta), & (u, v) \in [0, \theta]^2 \\ \text{máx}(\theta, u + v - 1), & (u, v) \in [\theta, 1]^2 \\ M(u, v), & \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (3.7)$$

La gráfica y los conjuntos de nivel de esta cópula se puede ver en la Figura 3.2. \diamond

En [59] hay múltiples ejemplos con distintos soportes, por ejemplo basados en curvas. La metodología es la misma, sólo que se complican el cálculo y las distintas regiones.

3.2.2. Suma ordinal de cópulas y mezclas de M

En este apartado se presenta un método que divide el cuadrado \mathbb{I}^2 en varias regiones y considera en cada región una determinada cópula. De esta forma se pueden obtener nuevas cópulas a partir de otras ya conocidas, simplemente combinándolas de una forma adecuada. Se trata del *método de la suma ordinal de cópulas*.

Después se verá un método similar, que subdivide \mathbb{I}^2 en varias regiones pero que sólo usa variaciones de la cota superior de Fréchet–Hoeffding M para construir una nueva cópula, que será singular. Es el *método de las mezclas de M* .

Comenzamos definiendo lo que se entiende por suma ordinal de cópulas.

Definición 3.1. Sea $\{J_i\}_{i \in I}$ una partición de \mathbb{I} formada por intervalos cerrados, que sólo se solapan en los extremos y que son no degenerados. Denotemos a estos intervalos por $J_i = [a_i, b_i]$, $i \in I$. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una colección de cópulas.

Se define la *suma ordinal de $\{C_i\}_{i \in I}$ con respecto a $\{J_i\}_{i \in I}$* como la cópula C dada por:

$$C(u, v) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)C_i\left(\frac{u - a_i}{b_i - a_i}, \frac{v - a_i}{b_i - a_i}\right), & (u, v) \in J_i^2 \\ M(u, v), & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.8)$$

Se puede probar que (3.8) es en efecto una cópula, pero verificar que es 2–creciente implica considerar varios casos (según la región a la que pertenezcan (u_1, v_1) , (u_1, v_2) , (u_2, v_1) y (u_2, v_2)) y se hace demasiado largo. En la Figura 3.3 se puede ver gráficamente la descomposición del cuadrado \mathbb{I}^2 en las regiones grises, donde la cópula estará dada por C_1, C_2, \dots, C_n , y la región blanca, que corresponde a M .

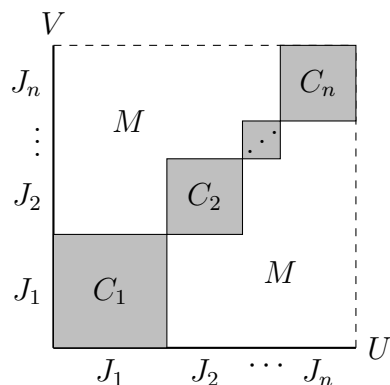


Figura 3.3: Estructura de la suma ordinal de cópulas.

Ejemplo 3.3. La suma ordinal de $\{\Pi, W, M\}$ con respecto a $\{[0, \frac{\theta}{2}], [\frac{\theta}{2}, \theta], [\theta, 1]\}$, con $0 < \theta < 1$, es la cópula

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} \frac{\theta}{2}\Pi\left(\frac{2u}{\theta}, \frac{2v}{\theta}\right), & (u, v) \in [0, \frac{\theta}{2}]^2 \\ \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}W\left(\frac{2u-\theta}{\theta}, \frac{2v-\theta}{\theta}\right), & (u, v) \in [\frac{\theta}{2}, \theta]^2 \\ \theta + (1-\theta)M\left(\frac{u-\theta}{1-\theta}, \frac{v-\theta}{1-\theta}\right), & (u, v) \in [\theta, 1]^2 \\ M(u, v), & \text{en el resto} \end{cases} \quad (3.9)$$

En la Figura 3.4 podemos ver un representación gráfica de esta peculiar cópula. ◇

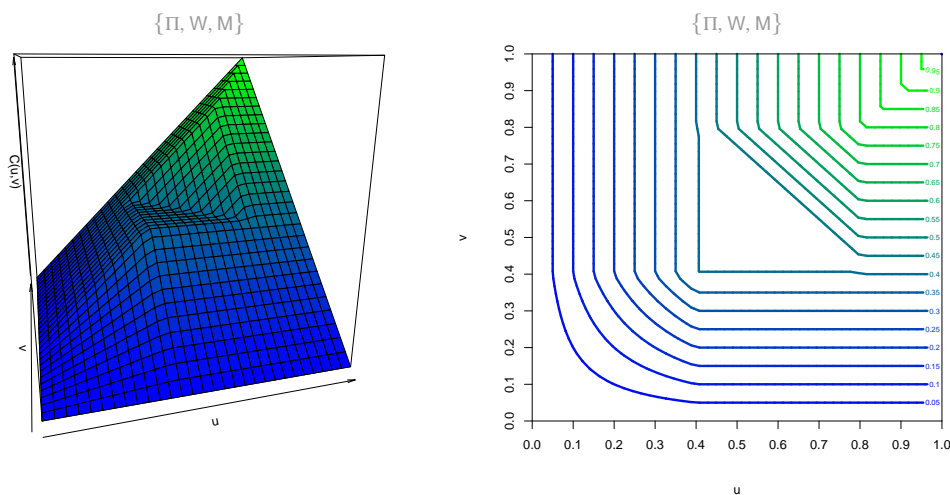


Figura 3.4: Suma ordinal de $\{\Pi, W, M\}$ con respecto a $\{[0, \frac{\theta}{2}], [\frac{\theta}{2}, \theta], [\theta, 1]\}$ con $\theta = 0.8$.

El próximo teorema caracteriza las cópulas que son sumas ordinales, lo cual es útil para saber si una cópula cualquiera se puede expresar mediante sumas ordinales, por ejemplo, a través de la ecuación (3.10).

Teorema 3.1. *Sea C una cópula. Entonces C es una suma ordinal si y sólo si existe un t en $(0, 1)$ tal que $C(t, t) = t$.*

Demostración. Supongamos que existe un t en $(0, 1)$ tal que $C(t, t) = t$. Sean $C_1(u, v) := \frac{C(tu, tv)}{t}$ y $C_2(u, v) := \frac{C(t+(1-t)u, t+(1-t)v)-t}{1-t}$ para $u, v \in \mathbb{I}$. Tanto C_1 como C_2 son cópulas (se prueba usando la hipótesis $C(t, t) = t$) y entonces C es la suma ordinal de $\{C_1, C_2\}$ respecto a $\{[0, t], [t, 1]\}$:

$$C(u, v) = \begin{cases} 0 + (t - 0)C_1\left(\frac{u-0}{t-0}, \frac{v-0}{t-0}\right) = C(u, v), & (u, v) \in [0, t]^2 \\ t + (1 - t)C_2\left(\frac{u-t}{1-t}, \frac{v-t}{1-t}\right) = C(u, v), & (u, v) \in [t, 1]^2 \\ V_C([0, u] \times [0, v]) = V_C([0, u] \times [0, 1]) = u, & (u, v) \in [0, t] \times [t, 1] \\ V_C([0, u] \times [0, v]) = V_C([0, 1] \times [0, v]) = v, & (u, v) \in [t, 1] \times [0, t] \end{cases} \quad (3.10)$$

El recíproco es trivial, pues por definición $C(t, t)$ toma todos los valores en cada $[a_i, b_i], i \in I$, por lo que existirá un $t_0 \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$ tal que $C(t_0, t_0) = t_0$. □

El *método de las mezclas de M* es similar al de las sumas ordinales, pero trabaja sólo con M . Las cópulas obtenidas por este método surgen mediante el siguiente proceso de alteración de la cópula M :

- I. Se comienza con la masa de probabilidad de M en la diagonal de \mathbb{I}^2 .
- II. Se *corta* \mathbb{I}^2 verticalmente en un número finito de bandas.
- III. Se reordenan las bandas de la forma que se desee, pudiendo también *girarlas* (reflejarlas) sobre su eje vertical de simetría.

Para formalizar este proceso, se establece la siguiente definición.

Definición 3.2. Sea $\{J_i\}_{i=1, \dots, n}$ una partición finita de \mathbb{I} formada por intervalos cerrados, que sólo se solapan en los extremos y que son no degenerados. Sea π una permutación del grupo de las permutaciones $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ y $\omega : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ una función que a cada banda i le asigna -1 si ha sido girada o 1 si permanece igual. Se denomina *mezcla de M* y se denota por $M(n, \{J_i\}, \pi, \omega(\{1, \dots, n\}))$ a la cópula obtenida siguiendo los pasos anteriores.

Denotaremos \mathbb{I}_n a la colección $\{J_i\}_{i=1, \dots, n}$ cuando sea una partición *regular* de \mathbb{I} , es decir, cuando la longitud de cada subintervalo sea $\frac{1}{n}$.

Esta notación caracteriza de forma unívoca a una mezcla de M . En el siguiente ejemplo, se ve que calcular una mezcla de M sencilla ($n = 3$) puede conllevar bastantes cálculos y acabar en una expresión complicada.

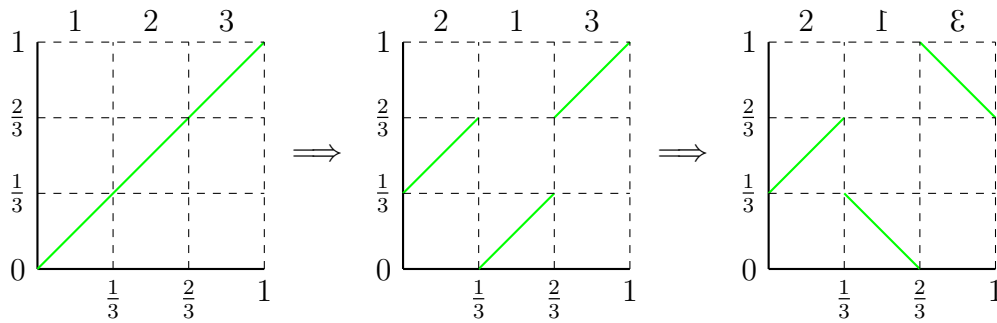


Figura 3.5: Construcción de una cópula mezcla de M .

Ejemplo 3.4. Vamos a calcular la cópula $C = M(3, \mathbb{I}_3, (2, 1, 3), (1, -1, -1))$. El primer paso es reordenar M de acuerdo a la forma de C . Esto se puede ver gráficamente en la Figura 3.5. Una vez reordenado el soporte de M , hay que calcular la expresión de C . Se hace como en la subsección anterior: aplicando las propiedades de la definición de cópula y las técnicas usadas en el Ejemplo 3.2. De esta forma, dividimos el cuadrado unidad en 10 regiones en las que obtener la expresión, tal y como recoge la Figura 3.6.

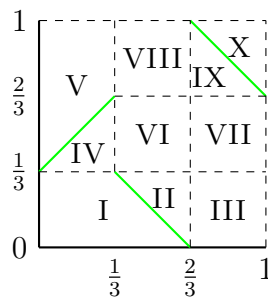


Figura 3.6: Regiones de la cópula mezcla de M .

Englobando las regiones por rectángulos se consigue simplificar hasta tener la expresión

$$C(u, v) = \begin{cases} \max(u, v - \frac{1}{3}), & (u, v) \in [0, \frac{1}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \max(0, u + v - \frac{2}{3}), & (u, v) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [0, \frac{1}{3}] \\ \max(\frac{2}{3}, u + v - 1), & (u, v) \in [\frac{2}{3}, 1] \times [\frac{2}{3}, 1] \\ 0 & (u, v) \in [0, \frac{1}{3}] \times [0, \frac{1}{3}] \\ u + v - \frac{2}{3}, & (u, v) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ M(u, v), & \text{en el resto} \end{cases} \quad (3.11)$$

Notemos que no es una suma ordinal porque hay rectángulos fuera de la “diagonal de rectángulos” en los que la cópula es distinta de M , aunque M aparece en ciertos rectángulos. La gráfica y conjuntos de nivel de esta cópula se pueden ver en la Figura 3.7. \diamond

Ejemplo 3.5. La cópula singular (3.7) es una mezcla de M dada por la expresión $M(2, ([0, \theta], [\theta, 1]), (1, 2), (-1, -1))$. \diamond

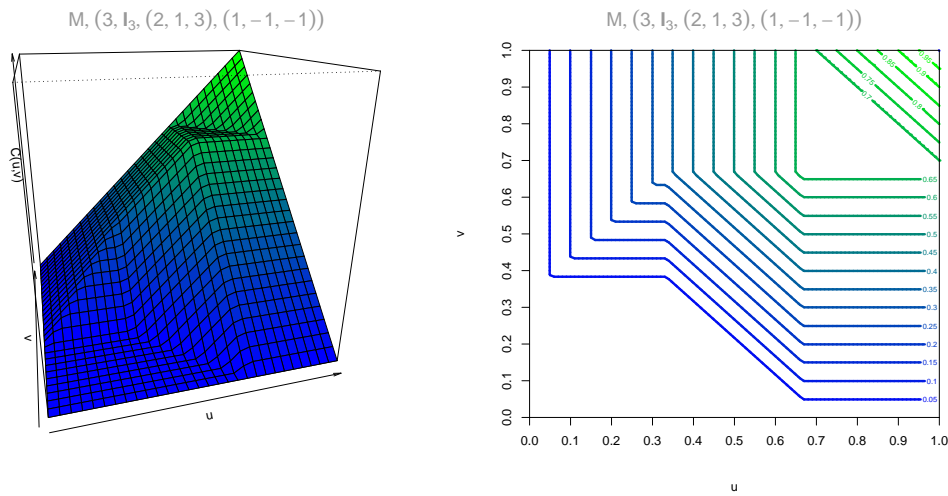


Figura 3.7: Mezcla de M .

Las mezclas de M son una herramienta muy poderosa, pues como muestra el Teorema 3.2, toda cópula se puede aproximar tanto como se quiera mediante una mezcla de M . Es decir, que una cópula cualquiera se puede ver como el límite de una sucesión de cópulas mezclas de M . Este teorema tiene un caso particular, el Corolario 3.1, con una interesante interpretación.

Teorema 3.2. *Sea C una cópula cualquiera. Para todo $\varepsilon > 0$, existe una mezcla de M , que denotaremos C_ε , tal que*

$$\sup_{u,v \in \mathbb{I}} |C_\varepsilon(u, v) - C(u, v)| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Entonces, podemos aproximarnos a C por medio de una cópula mezcla de M tanto como queramos, usando la norma del supremo.

Otra consecuencia de este teorema es que el conjunto de cópulas mezclas de M es denso en el conjunto de las cópulas, usando la norma del supremo.

Demostración. Puede verse en [54]. □

Corolario 3.1. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe una mezcla de M , que denotaremos C_ε , tal que*

$$\sup_{u,v \in \mathbb{I}} |C_\varepsilon(u, v) - \Pi(u, v)| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Intuitivamente, dos variables X e Y son **completamente dependientes** si una variable está totalmente predicha a partir de la otra, mediante algún tipo de correspondencia *unívoca*. Esto se puede formalizar diciendo que en ese caso existe una función biyectiva φ tal que $\mathbb{P}\{Y = \varphi(X)\} = 1$. En el caso opuesto tenemos la **independencia** de X e Y ,

donde la información de una variable no aporta nada sobre la otra. Veremos que estos conceptos aparentemente opuestos admiten un nexo de unión.

Supongamos que la cópula de X e Y es una mezcla de M . Entonces, como el soporte de cualquier mezcla de M es el grafo de una función biyectiva (reordenamos la diagonal sin solapar), X e Y son mutuamente dependientes. De hecho, **todas las mezclas de M corresponden a variables completamente dependientes**. Pero por el Corolario 3.1, tenemos mezclas de M arbitrariamente cerca de Π . Esto implica que el comportamiento de un par de **variables aleatorias independientes** y con ciertas marginales es el **límite de dos variables aleatorias completamente dependientes** y con las mismas marginales.

Esto admite una interpretación en términos de φ : al ir mezclando el soporte de M , vamos complicando cada vez más la función de dependencia φ , hasta el punto en que puede llegar a verse como un generador de números aleatorios. De esa forma los puntos generados como $(X, \varphi(X))$ irán perdiendo el patrón de dependencia al complicarse φ , y parecerán aleatorios, a pesar de que X y $\varphi(X)$ sean completamente dependientes.

Si conocemos la imagen de una cópula C en un punto del interior de \mathbb{I}^2 , entonces se pueden mejorar las cotas de Fréchet–Hoeffding, a través de cópulas dadas por mezclas de M .

Teorema 3.3. *Sea C una cópula y supongamos que $C(a, b) = \theta$, donde $(a, b) \in (0, 1)^2$. Entonces*

$$C_L(u, v) \leq C(u, v) \leq C_U(u, v), \quad (3.14)$$

donde C_U y C_L son las cópulas dadas por:¹

$$C_U = M(4, \{[0, \theta], [\theta, a], [a, a + b - \theta], [a + b - \theta, 1]\}, (1, 2, 3, 4), 1) \quad (3.15)$$

$$= \text{mín}(u, v, \theta + (u - a)^+ + (v - b)^+), \quad (3.16)$$

$$C_L = M(4, \{[0, a - \theta], [a - \theta, a], [a, 1 - b + \theta], [1 - b + \theta, 1]\}, (4, 2, 3, 1), -1) \quad (3.17)$$

$$= \text{máx}(0, u + v - 1, \theta - (a - u)^+ - (b - v)^+). \quad (3.18)$$

Como $C_L(a, b) = C_U(a, b) = \theta$, las cotas son las mejores posibles.

Demostración. Aplicando el Teorema 1.3 y teniendo en cuenta que una cópula es no decreciente en cada componente, se tiene que para $u \geq a$, $0 \leq C(u, v) - C(a, v) \leq u - a$ y para $u < a$, $0 \leq C(a, v) - C(u, v) \leq a - u$, con lo que juntando ambos casos se tiene:

$$-(a - u)^+ \leq C(u, v) - C(a, v) \leq (u - a)^+ \quad (3.19)$$

¹Denotamos $x^+ = \text{máx}(0, x)$.

De forma análoga,

$$-(b-v)^+ \leq C(a,v) - C(a,b) \leq (v-b)^+. \quad (3.20)$$

Sumando (3.19) y (3.20),

$$\theta - (a-u)^+ - (b-v)^+ \leq C(u,v) \leq \theta + (v-b)^+ + (u-a)^+. \quad (3.21)$$

Para tener (3.14), añadimos las cotas de Fréchet–Hoeffding a (3.21). \square

3.2.3. Mixturas y sumas convexas

Cuando presentamos las familias de cópulas de Mardia y de Fréchet, vimos que estaban obtenidas a partir de combinaciones lineales convexas de las cópulas Π , W y M . La técnica de construir nuevas cópulas a partir de otras existentes mediante sumas convexas es una de las más empleadas. Además, aparte de los parámetros de cada cópula, permite introducir nuevos parámetros asociados a los coeficientes de la combinación lineal.

De la definición de función cópula se puede deducir fácilmente que toda combinación lineal convexa de cópulas es una cópula. Este resultado es conocido para las funciones de distribución, aunque aquí lo vamos a enunciar y probar específicamente para cópulas.

Lema 3.1. *Si C_1, \dots, C_n son cópulas, entonces $C = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ es una cópula, con $0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.*

Demostración. Veamos que C es una cópula:

- I. $C(0, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(0, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 0 = 0$ y análogamente para $C(u, 0) = 0$.
- II. $C(1, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(1, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v = v$ y análogamente para $C(u, 1) = u$.
- III. Para $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$,

$$\begin{aligned} & C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i [C_i(u_2, v_2) - C_i(u_1, v_2) - C_i(u_2, v_1) + C_i(u_1, v_1)] \geq 0. \end{aligned}$$

\square

Generalizando la idea de combinación lineal convexa, podemos ponderar sobre una colección infinita de cópulas indexadas por un parámetro continuo $\theta \in \Theta$. Esto se hace mediante una función de distribución Λ , asociada a una variable aleatoria η . De esta

forma, podemos englobar, por ejemplo, el caso de una suma convexa (η discreta con probabilidades $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$) y el de la media *continua* ($\eta = \mathcal{U}_\Theta$).

Definición 3.3. Sea una familia de cópulas indexadas por el parámetro θ , representada por $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$. Sea η una variable aleatoria que toma valores en el conjunto Θ y con función de distribución Λ . Se define la *mezcla o mixtura* de $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ con respecto a Λ como la cópula C' dada por

$$C'(u, v) = \mathbb{E}_\eta [C_\eta(u, v)] = \int_{Sop(\eta)} C_\eta(u, v) d\Lambda(\eta). \tag{3.22}$$

A la distribución Λ se la conoce como la distribución de mezcla o mixtura de la familia $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$. Si la distribución de η tiene un parámetro $\alpha \in A$, la anterior expresión se traduce en

$$C'_\alpha(u, v) = \mathbb{E}_\eta [C_\eta(u, v)] = \int_{Sop(\eta)} C_\eta(u, v) d\Lambda_\alpha(\eta). \tag{3.23}$$

De esta forma, mediante (3.23), se puede definir una nueva familia de cópulas $\{C'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a partir de $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$.

Observación 3.1. La cópula C' procedente de la mezcla de $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ con respecto a Λ es en efecto una cópula:

- I. $C'(u, 0) = \int_{Sop(\eta)} C_\eta(u, 0) d\Lambda(\eta) = \int_{Sop(\eta)} 0 d\Lambda(\eta) = 0$, análogo para $C'(0, v) = 0$.
- II. $C'(u, 1) = \int_{Sop(\eta)} C_\eta(u, 1) d\Lambda(\eta) = \int_{Sop(\eta)} u d\Lambda(\eta) = u$, análogo para $C'(1, v) = v$.
- III. Para $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$,

$$\begin{aligned} & C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_2) - C'(u_2, v_1) + C'(u_1, v_1) \\ &= \int_{Sop(\eta)} C'_\eta(u_2, v_2) - C'_\eta(u_2, v_1) - C'_\eta(u_1, v_2) + C'_\eta(u_1, v_1) d\Lambda(\eta) \geq 0. \end{aligned}$$

◁

Ejemplo 3.6. Dada una cópula cualquiera C , consideremos la familia de cópulas $\{C_\theta\}_{\theta \in (0,1)}$ formada por

$$C_\theta(u, v) = \begin{cases} C(1 - \theta + u, v) - C(1 - \theta, v), & u \leq \theta \\ v - C(1 - \theta, v) + C(u - \theta, v), & u > \theta \end{cases}. \tag{3.24}$$

Consideramos la distribución de mezcla $\Lambda = \mathcal{U}(0, 1)$ y así

$$\mathbb{E}_\theta [C_\theta(u, v)] = \int_0^1 C_\theta(u, v) d\theta = uv = \Pi(u, v). \tag{3.25}$$

La cópula producto surge como la esperanza da la familia de cópulas con respecto al parámetro θ . ◇

Ejemplo 3.7. La familia de cópulas de Farlie–Gumbel–Morgenstern (FGM) está formada por las cópulas de la forma

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \tag{3.26}$$

con $\theta \in [-1, 1]$. Estas cópulas tienen la propiedad de simetría, definida en la Definición 1.28 y, por lo tanto, si las v.a. continuas X e Y tienen la misma distribución marginal y su cópula asociada es de la familia FGM, serán intercambiables.

Tomemos como distribución de mezcla a una distribución Beta adaptada al intervalo $(-1, 1)$, es decir $\Lambda_{\alpha, \beta} \stackrel{d}{=} -1 + 2B(\alpha, \beta)$. Entonces obtenemos una nueva familia de cópulas:

$$\begin{aligned} C'_{\alpha, \beta}(u, v) &= \int_{-1}^1 C_\theta(u, v) f_{\alpha, \beta}(\theta) d\theta = uv + uv(1 - u)(1 - v) \left[2 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - 1 \right] \\ &= uv + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} uv(1 - u)(1 - v). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Podemos definir $\theta' = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ y ya que $-1 < \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} < 1$, vemos que la nueva familia $\{C'\}_{\theta' \in (0, 1)}$ es muy parecida a la de FGM, simplemente hay que extenderla por continuidad para $\theta' = -1$ y $\theta' = 1$. De esta forma, podemos decir que *la familia FGM es invariante por la distribución de mezcla $\Lambda_{\alpha, \beta}$, cambiando el parámetro original θ por $\theta' = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.* ◇

Una forma particular de construir nuevas cópulas por mixturas es la *mezcla de potencias*, o el método de Marshall–Olkin [50]. Este método construye cópulas mediante las transformadas de Laplace de funciones de distribución.

Ejemplo 3.8. Dada una variable aleatoria η con función de distribución Λ , su transformada de Laplace se define como

$$\mathcal{L} \{ \Lambda \} (t) = \int_0^\infty e^{-\eta t} d\Lambda(\eta). \tag{3.28}$$

En lo que sigue, denotaremos simplemente por ϕ a la transformada de Laplace. Dadas dos funciones de distribución F_1 y F_2 , definimos las funciones $G_i(x) = \exp \{ -\phi^{-1}(F_i(x)) \}$, $i = 1, 2$, que resultan ser funciones de distribución (es sencillo comprobar que verifican la Definición 1.9).

Entonces con $G_i, i = 1, 2$, podemos construir:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \int_0^\infty G_1(x)^\alpha G_2(y)^\alpha dM(\alpha) = \phi(-\log G_1(x) - \log G_2(y)) \\ &= \phi(\phi^{-1}(F_1(x)) + \phi^{-1}(F_2(y))). \end{aligned} \tag{3.29}$$

H es una distribución porque es una mixtura de $G_1^\alpha G_2^\alpha$ (distribución para todo $\alpha > 0$) con respecto a M . Si en (3.29) tomamos F_1 y F_2 como uniformes $\mathcal{U}(0, 1)$, obtenemos la siguiente cópula

$$C(u_1, u_2) = \phi(\phi^{-1}(u_1) + \phi^{-1}(u_2)). \quad (3.30)$$

Por lo tanto, hemos construido una familia de cópulas de la forma (3.30) indexada por el conjunto de funciones ϕ que son transformadas de Laplace, con lo que tenemos una gran variedad de cópulas.

En el Capítulo 4 se ve que las funciones (3.30) son cópulas para una familia de funciones más amplia que las transformadas de Laplace, denominadas *generadores de cópulas Arquimedianas*. \diamond

3.2.4. Cópulas con ciertas secciones horizontales o verticales

El objetivo de este apartado es construir y caracterizar cópulas con determinadas secciones horizontales y verticales (Definición 1.8). El tipo de secciones que se consideran son las lineales, cuadráticas y cúbicas. Esto es equivalente a buscar cópulas que sean lineales, cuadráticas o cúbicas en una variable.

El estudio de las secciones horizontales y verticales es interesante, por ejemplo, cuando U y V son variables uniformes con distribución C , ya que las secciones son proporcionales a las distribuciones condicionales. Para $u_0 \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}\{V \leq v | U \leq u_0\} = \frac{\mathbb{P}\{U \leq u_0, V \leq v\}}{\mathbb{P}\{U \leq u_0\}} = \frac{C(u_0, v)}{u_0} = \frac{v_{u_0}(v)}{u_0}. \quad (3.31)$$

Como el **estudio de las secciones horizontales y el de las verticales es simétrico**, enunciaremos los resultados para secciones horizontales, siendo válidos para las horizontales sin más que intercambiar los papeles de u y v .

Cópulas con secciones lineales

Una cópula que tenga una sección horizontal lineal, es decir que sea lineal en u , debe tener la forma

$$C(u, v) = a(v)u + b(v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2, \quad (3.32)$$

donde $a(\cdot)$ y $b(\cdot)$ serán ciertas funciones. Estas funciones se pueden deducir fácilmente de las condiciones de contorno de las cópulas,

$$b(v) = C(0, v) = 0 \text{ y } a(v) = C(1, v) = v, \quad \forall v \in \mathbb{I}. \quad (3.33)$$

Por lo tanto, la única cópula con secciones lineales es la cópula producto.

Cópulas con secciones cuadráticas

Para que una cópula tenga una sección horizontal cuadrática, i.e. cuadrática en u , debe tener la forma

$$C(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \quad (3.34)$$

De nuevo, por las condiciones de contorno,

$$c(v) = C(0, v) = 0 \text{ y } a(v) + b(v) = C(1, v) = v, \quad \forall v \in \mathbb{I}. \quad (3.35)$$

Podemos denotar $a(v) = -\Psi(v)$ y $b(v) = v - a(v) = v + \Psi(v)$, por lo que la expresión (3.34) se queda en

$$C(u, v) = uv + \Psi(v)u(1 - u), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \quad (3.36)$$

Las condiciones que ha de verificar la función Ψ para que (3.36) sea una cópula son las que proporciona el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Sea Ψ una función con dominio \mathbb{I} , y sea C una cópula dada por (3.36). Entonces C es una cópula si y sólo si:*

- I. $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ (Condiciones de contorno de C).
- II. Ψ satisface la condición de Lipschitz (C es 2-creciente)

$$|\Psi(v_2) - \Psi(v_1)| \leq |v_2 - v_1|, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{I}. \quad (3.37)$$

Además, si se cumplen ambas condiciones, C es absolutamente continua.

Demostración. Las condiciones de contorno son equivalentes a la condición I:

$$\begin{aligned} C(0, v) = 0, \quad C(u, 0) = \Psi(0)u(1 - u) = 0 &\Leftrightarrow \Psi(0) = 0, \\ C(1, v) = v, \quad C(u, 1) = u + \Psi(1)u(1 - u) = u &\Leftrightarrow \Psi(1) = 0. \end{aligned}$$

Para ver que $C(u, v) = uv + \Psi(v)u(1 - u)$ es 2-creciente, calcularemos primero su C -volumen para $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$:

$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = (u_2 - u_1) \{ (v_2 - v_1) + [\Psi(v_2) - \Psi(v_1)](1 - u_1 - u_2) \}. \quad (3.38)$$

Si $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$ o $u_1 + u_2 = 1$ entonces $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$, por tanto hay que estudiar el caso $u_1 < u_2, v_1 < v_2, u_1 + u_2 \neq 1$. Que (3.38) sea mayor o igual que cero es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\Psi(v_2) - \Psi(v_1)}{v_2 - v_1} \leq \frac{1}{u_2 + u_1 - 1}, & u_1 + u_2 > 1 \\ \frac{\Psi(v_2) - \Psi(v_1)}{v_2 - v_1} \geq \frac{1}{u_2 + u_1 - 1}, & u_1 + u_2 < 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

Y como

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \frac{1}{u_1 + u_2 - 1} : 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, u_1 + u_2 > 1 \right\} &= 1, \\ \sup \left\{ \frac{1}{u_1 + u_2 - 1} : 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, u_1 + u_2 < 1 \right\} &= -1, \end{aligned}$$

entonces (3.39) es equivalente a

$$-1 \leq \frac{\Psi(v_2) - \Psi(v_1)}{v_2 - v_1} \leq 1, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{I} : v_1 < v_2. \quad (3.40)$$

Por tanto (3.37) es equivalente a que C sea 2-creciente.

La continuidad absoluta de C se sigue de la continuidad absoluta de Ψ , y Ψ es absolutamente continua porque es Lipschitziana (ver Apéndice A). \square

Corolario 3.2. *La función C definida por (3.32) es una cópula si y sólo si Ψ satisface las siguientes tres condiciones:*

- I. Ψ es absolutamente continua en \mathbb{I} .
- II. $|\Psi'(v)| \leq 1$ para casi todo $v \in \mathbb{I}$.
- III. $|\Psi(v)| \leq \min(v, 1 - v), \quad \forall v \in \mathbb{I}$.

Demostración. Por el Teorema 3.4, sólo tenemos que probar la equivalencia de estas condiciones con respecto a: $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ y Ψ Lipschitziana con $K = 1$.

Probamos que se verifican estas condiciones si se dan las del Teorema 3.4. Aplicando el Teorema A.4, Ψ es a.c. Por tener $K = 1$, se verifica II, mientras que III surge de aplicar (3.40) con $u = 0$ y $u = 1$.

Ahora veamos que se cumplen las condiciones del teorema suponiendo las del corolario. La primera surge tomando $v = 0$ y $v = 1$ en II, y la condición de Lipschitz se prueba mediante I, II y la aplicación del Teorema A.4. \square

Ejemplo 3.9. La función $\Psi_\theta(v) = \theta v(1 - v)$, con $\theta \in [-1, 1]$ cumple las tres propiedades del Corolario 3.2 y define una familia de cópulas con secciones cuadráticas horizontales,

$$C_\theta(u, v) = uv - \theta uv(1 - u)(1 - v). \quad (3.41)$$

Esta es la familia de FGM, presentada en el Ejemplo 3.7. Es una familia con secciones cuadráticas horizontales y verticales. \diamond

Cópulas con secciones cúbicas

Para que una cópula tenga una sección horizontal cúbica, i.e. cúbica en u , debe tener la forma

$$C(u, v) = a(v)u^3 + b(v)u^2 + c(v)u + d(v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \quad (3.42)$$

Por las condiciones de contorno,

$$d(v) = C(0, v) = 0 \text{ y } a(v) + b(v) + c(v) = C(1, v) = v, \quad \forall v \in \mathbb{I}. \quad (3.43)$$

Denotando $\alpha(v) = -(a(v) + b(v))$ y $\beta(v) = -2a(v) - b(v)$, la expresión (3.42) se queda en

$$C(u, v) = uv + u(1 - u) [\alpha(v)(1 - u) + \beta(v)u], \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2. \quad (3.44)$$

Las condiciones que han de verificar las funciones α y β para que (3.44) sea una cópula son las que proporciona el Teorema 3.5. El Teorema 3.6 caracteriza, además, las cópulas de supervivencia, la simetría radial y la simetría conjunta de las cópulas con secciones cúbicas. Es importante también el Teorema 3.7, que caracteriza la forma de las cópulas con secciones cúbicas en *ambas variables*. Las demostraciones de estos teoremas se pueden ver en [61].

Teorema 3.5. Sean α y β dos funciones de \mathbb{I} en \mathbb{R} que verifican $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = 0$. Si C está definida como (3.44), entonces C es una cópula si y sólo si:

- I. α y β son absolutamente continuas.
- II. Para casi todo $u, v \in \mathbb{I}$, se verifica alguna de las siguientes condiciones:
 - a) $-1 \leq \alpha'(v) \leq 2$ y $-2 \leq \beta'(v) \leq 1$.
 - b) $[\alpha'(v)]^2 - \alpha'(v)\beta'(v) + [\beta'(v)]^2 - 3\alpha'(v) + 3\beta'(v) \leq 0$.

Teorema 3.6. Sean α , β y C definidas como en el Teorema 3.5. Entonces:

- I. La cópula de supervivencia \widehat{C} está dada por

$$\widehat{C}(u, v) = uv + u(1 - u) [\beta(1 - v)(1 - u) + \alpha(1 - v)u]. \quad (3.45)$$

- II. $C = \widehat{C}$ si y sólo si $\alpha(v) = \beta(1 - v)$, $\forall v \in \mathbb{I}$.

III. C verifica (1.97) si y sólo si $\alpha(v) = \beta(1 - v) = -\alpha(1 - v) = -\beta(v), \forall v \in \mathbb{I}$.

Teorema 3.7. *Supongamos que C tiene secciones cúbicas en u y v . Entonces*

$$C(u, v) = uv + uv(1 - u)(1 - v) [A_1v(1 - u) + A_2(1 - v)(1 - u) + B_1uv + B_2u(1 - v)], \tag{3.46}$$

donde A_1, A_2, B_1 y B_2 son constantes reales tales que $(A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_1, A_1)$ y (A_2, B_2) pertenecen a $S = \{(x, y) \in [-1, 2] \times [-2, 1] : x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0\}$.

3.2.5. Cópulas con ciertas secciones diagonales

Las secciones diagonales tiene interés porque, en virtud de la Proposición 1.2, si X e Y tienen una distribución marginal común F , entonces:

$$\text{máx}(X, Y) \sim \delta_C(F(t)) = C(F(t), F(t)), \tag{3.47}$$

$$\text{máx}(X, Y) \sim \delta_{\tilde{C}}(F(t)) = \tilde{C}(F(t), F(t)) = 2t - \tilde{\delta}_C(F(t)). \tag{3.48}$$

En lo sucesivo nos será útil el concepto de *diagonal*, que no debemos de confundir con el de *sección diagonal*.

Definición 3.4. Una función $\delta : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ se dice que es una *diagonal* si verifica:

$$i) \quad \delta(1) = 1. \tag{3.49}$$

$$ii) \quad 0 \leq \delta(t_2) - \delta(t_1) \leq 2(t_2 - t_1), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{I} : t_1 \leq t_2. \tag{3.50}$$

$$iii) \quad \delta(t) \leq t, \forall t \in \mathbb{I}. \tag{3.51}$$

Las tres condiciones exigidas son verificadas por toda sección diagonal: (3.49) por $C(1, 1) = 1$, (3.50) por el Corolario 1.1 y (3.51) al ser C 2-creciente y tomar $u_1 = t \leq u_2 = 1, v_1 = 0 \leq v_2 = t$.

El siguiente teorema permite obtener cópulas con una sección diagonal determinada:

Teorema 3.8. *Sea δ una diagonal y sea*

$$C(u, v) = \text{mín} \left(u, v, \frac{\delta(u) + \delta(v)}{2} \right). \tag{3.52}$$

Entonces C es una cópula cuya sección diagonal es δ . A las cópulas de esta forma se les llamará *cópulas diagonales*.

Demostración. Es bastante técnica por el hecho de demostrar que (3.52) es 2-creciente. Se puede ver en [26]. □

Sin embargo, este no es un teorema de caracterización, entre otras cosas debido a que varias cópulas pueden tener la misma sección diagonal.

Ejemplo 3.10. Algunas cópulas diagonales:

- Sea $\delta(t) = t$, la sección diagonal de M . La cópula diagonal construida con ella es $C(u, v) = \min(u, v, \frac{u+v}{2}) = \min(u, v) = M(u, v)$.
- Sea $\delta(t) = \max(0, 2t - 1)$, la sección diagonal de W . La cópula diagonal construida con ella es $C(u, v) = \min(u, v, \frac{\max(0, 2u-1) + \max(0, 2v-1)}{2})$.
- Sea $\delta(t) = t^2$, la sección diagonal de Π . La cópula diagonal construida con ella es $C(u, v) = \min(u, v, \frac{u^2+v^2}{2}) \neq \Pi(u, v)$.

◇

La relación entre las *cópulas diagonales* y las distribuciones de los estadísticos ordenados está recogida en el siguiente teorema.

Teorema 3.9. Sean X e Y variables aleatorias continuas con la misma distribución marginal y con cópula asociada C . Entonces, la distribución conjunta de $\max(X, Y)$ y $\min(X, Y)$ es la cota superior de Fréchet–Hoeffding si y sólo si C es una cópula diagonal.

Demostración. También dejaremos sin demostrar este teorema, por ser bastante técnico. Su demostración se puede ver en [60]. □

Hay más formas de construir cópulas con determinadas secciones diagonales, por ejemplo las llamadas *cópulas de Bertino*, que son cópulas de la forma

$$B_\delta(u, v) = \begin{cases} u - \inf_{u \leq t \leq v} t - \delta(t), & u \leq v \\ v - \inf_{v \leq t \leq u} t - \delta(t), & v \leq u \end{cases} \quad (3.53)$$

y que tienen por sección diagonal a δ .

3.3. Métodos algebraicos

Los métodos algebraicos, definidos así por Nelsen [59], explotan las relaciones entre las marginales y la distribución conjunta, que aparecen en determinadas familias de distribuciones. La mayoría de las veces, la relación surge basándose en la hipótesis de independencia, y es modificada con la inclusión de un parámetro de dependencia θ . Así se puede construir la cópula asociada a dicha distribución y que parametriza la dependencia mediante θ .

Como son métodos heurísticos, el procedimiento es depende de la distribución a tratar. Se muestran dos ejemplos bastante ilustrativos: *la familia de cópulas de Ali-Mikhail-Haq* y *la familia de cópulas de Plackett*.

Ejemplo 3.11. Supongamos que (X, Y) sigue la *distribución logística bivalente de Gumbel*, es decir,

$$F(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}, \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (3.54)$$

Las marginales de esta distribución son $F_1(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ y $F_2(y) = (1 + e^{-y})^{-1}$.

Consideramos el odds ratio de supervivencia² para la distribución conjunta F , que se puede expresar en función de las marginales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(x, y)}{F(x, y)} &= e^{-x} + e^{-y} \\ &= \frac{1 - F_1(x)}{F_1(x)} + \frac{1 - F_2(y)}{F_2(y)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

En el caso de independencia entre X e Y , se verifica que $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$, con lo que la anterior expresión se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(x, y)}{F(x, y)} &= \frac{1 - F_1(x)F_2(y)}{F_1(x)F_2(y)} \\ &= \frac{1 - F_1(x)}{F_1(x)} + \frac{1 - F_2(y)}{F_2(y)} + \frac{1 - F_1(x)}{F_1(x)} \frac{1 - F_2(y)}{F_2(y)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Observando el parecido entre la ecuación (3.55) (dependencia), y la ecuación (3.56) (independencia), Ali, Mikhail y Haq propusieron un ratio bivalente modificado (o generalizado) con un parámetro de dependencia θ :

$$\frac{1 - F(x, y)}{F(x, y)} = \frac{1 - F_1(x)}{F_1(x)} + \frac{1 - F_2(y)}{F_2(y)} + (1 - \theta) \frac{1 - F_1(x)}{F_1(x)} \frac{1 - F_2(y)}{F_2(y)}. \quad (3.57)$$

Así, cuando $\theta = 1$, (3.57) se reduce a (3.55) y si $\theta = 0$, (3.57) es (3.56). Usando las transformaciones de probabilidad, podemos definir $u = F_1(x)$ y $v = F_2(y)$ y aplicando el Teorema de Sklar, transformar (3.57) en

$$\frac{1 - C_\theta(u, v)}{C_\theta(u, v)} = \frac{1 - u}{u} + \frac{1 - v}{v} + (1 - \theta) \frac{1 - u}{u} \frac{1 - v}{v}. \quad (3.58)$$

donde C_θ es la cópula de X e Y . Despejando $C_\theta(u, v)$ se obtiene la familia de cópulas de

²Este es un concepto bien conocido en análisis de supervivencia, definido para una variable aleatoria X con distribución F como $\frac{\mathbb{P}\{X > x\}}{\mathbb{P}\{X \leq x\}} = \frac{\overline{F}(x)}{F(x)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)}$.

Ali–Mikhail–Haq:

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}. \tag{3.59}$$

Falta aclarar el conjunto de posibles valores de θ y comprobar que para esos valores C_θ es una cópula. Las condiciones de contorno I y II se verifican trivialmente para cualquier valor de θ . Para que $C_\theta(u, v) \geq 0$ en \mathbb{I}^2 se necesita que $\theta \leq 1$ y para que $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} \geq 0$ se necesita $\theta \geq -1$. Así $C_\theta(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C_\theta(s,t)}{\partial s \partial t} dt ds$ en \mathbb{I}^2 y por el Lema 1.6 C_θ es 2–creciente, siendo una cópula. Por tanto, $\theta \in [-1, 1]$ y C_θ es una cópula absolutamente continua.

En el capítulo de simulación se ve que estas cópulas son similares a las de Farlie–Gumbel–Morgenstern y sólo pueden modelar una dependencia débil. ◇

Ejemplo 3.12. La familia de distribuciones bivariantes de Plackett es el conjunto de distribuciones conjuntas bivariantes F , con marginales F_1 y F_2 que verifican la ecuación cuadrática

$$\theta = \frac{F(x, y) [1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x, y)]}{[F_1(x) - F(x, y)] [F_2(y) - F(x, y)]}, \tag{3.60}$$

donde $\theta \in (0, \infty)$ es un parámetro de asociación entre las variables X e Y . Esta familia se construyó extendiendo la medida de asociación del odds ratio (producto cruzado) en una tabla de contingencia 2×2 .

Consideremos la Tabla 3.1, en la que las variables X e Y sólo pueden tomar los valores “Grande” y “Pequeño”. La odds ratio de la tabla es $\theta = \frac{ad}{bc}$, y lo que hace es medir la dependencia entre X e Y :

- $\theta < 1$ indica que las observaciones se concentran en las celdas de la segunda diagonal, “Grande–Pequeño” y “Pequeño–Grande”. Hay una correlación negativa.
- $\theta = 1$ corresponde a independencia.
- $\theta > 1$ indica que las observaciones se concentran en las celdas de la diagonal, “Grande–Grande” y “Pequeño–Pequeño”. Hay una correlación positiva.

$X \setminus Y$	Grande	Pequeño
Grande	a	b
Pequeño	c	d

Tabla 3.1: Tabla de contingencia 2×2 .

Si para un punto $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ reemplazamos los sucesos de la v.a X “Grande” y “Pequeño” por $X > x$ y $X \leq x$ respectivamente y hacemos lo mismo con Y y con los sucesos $Y > y$

e $Y \leq y$, podemos interpretar a, b, c y d como las probabilidades $F(x, y)$, $F_1(x) - F(x, y)$, $F_2(y) - F(x, y)$ y $1 - F_1(x) - F_2(y) - F(x, y)$. De esta forma se obtiene una interpretación de (3.60), que también se puede ver geoméricamente en la Figura 3.8: para todo vértice (x, y) , si a, b, c y d son las probabilidades de los cuadrantes, $\theta = \frac{ad}{bc}$ permanece constante. Debido a las buenas propiedades de esta familia, se usa ampliamente en modelización y como alternativa a la normal bivalente. En [48, 9] se profundiza sobre la estimación de estas cópulas.

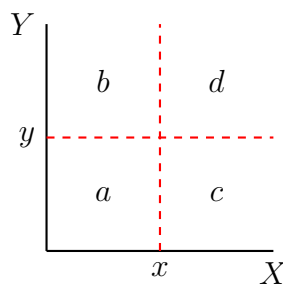


Figura 3.8: Propiedad de una distribución de Plackett.

Para la mayoría de las distribuciones conjuntas, θ sería función del punto (x, y) , pero en esta familia estamos seleccionando las distribuciones conjuntas en las que el ratio (3.60) permanece constante.

Definiendo $u = F_1(x)$ y $v = F_2(y)$ y usando el Teorema de Sklar, podemos transformar (3.60) en

$$\theta = \frac{C(u, v) [1 - u - v + C(u, v)]}{[u - C(u, v)] [v - C(u, v)]}, \tag{3.61}$$

donde C denota la cópula de X e Y . Esta es una ecuación cuadrática en $C(u, v)$, cuyas soluciones son $C = \Pi$ si $\theta = 1$ y

$$C(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] \pm \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}, \tag{3.62}$$

para $\theta \neq 1$. Aparecen dos soluciones, siendo válida la que tiene signo negativo, al ser la que verifique las condiciones de contorno para ser cópula [48]. Denotamos a dicha cópula por C_θ :

$$C_\theta(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}. \tag{3.63}$$

Además esta cópula es absolutamente continua (por el Lema 1.6).

Tenemos una familia de cópulas absolutamente continuas, indexadas por el parámetro

$\theta \in (0, \infty)$: para $\theta = 1$, $C_1 = \Pi$ y para $\theta > 0, \theta \neq 1$, C_θ está dada por (3.63). No obstante, podemos extender esta familia para $\theta = 0$ y $\theta = \infty$. Basta tomar límites en (3.61) para obtener las cotas de Fréchet–Hoeffding y que $C_0 = W$ y $C_\infty = M$. Entonces la familia de cópulas de Plackett se puede considerar con $\theta \in [0, \infty]$ pues así es comprensiva. \diamond

3.4. Cópulas con propiedades específicas

A continuación presentamos algunas propiedades que pueden verificar las cópulas y sus caracterizaciones correspondientes.

Definición 3.5. Sea C una cópula con derivadas parciales de segundo orden continuas en $(0, 1)^2$. Se dice que C es *armónica* en \mathbb{I}^2 si C satisface la ecuación de Laplace en $(0, 1)^2$:

$$\nabla^2 C(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} C(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} C(u, v) = 0, \quad \forall (u, v) \in (0, 1). \quad (3.64)$$

También diremos que C es *subarmónica* si $\nabla^2 C(u, v) \geq 0, \forall (u, v) \in (0, 1)^2$ y *superarmónica* si $\nabla^2 C(u, v) \leq 0, \forall (u, v) \in (0, 1)^2$.

Teorema 3.10. Π es armónica y además es la única cópula armónica.

Demostración. Π es claramente armónica porque sus derivadas segundas son nulas. Supongamos que C es una cópula armónica. Entonces $C - \Pi$ sería también una armónica y se anularía en la frontera de \mathbb{I}^2 por las condiciones de contorno de las cópulas. Por tanto, como una función armónica alcanza el máximo en la frontera, $C = \Pi$. \square

Definición 3.6. Una cópula C es *homogénea de grado k* si para algún número real k se verifica

$$C(\lambda u, \lambda v) = \lambda^k C(u, v), \quad \forall u, v, \lambda \in \mathbb{I}. \quad (3.65)$$

Teorema 3.11 (Caracterización de las cópulas homogéneas). *Supongamos que C es homogénea de grado k . Entonces:*

- I. $1 \leq k \leq 2$.
- II. C pertenece a la familia de Cuadras–Augé con $\theta = 2 - k$.

Demostración. Evaluando (3.65) en $(1, 1)$ tenemos que $C(\lambda, \lambda) = \lambda^k$, con lo que la sección diagonal de C es $\delta_C(t) = t^k$. Usando la desigualdad de Fréchet–Hoeffding expresada en términos de secciones diagonales, tenemos que

$$\delta_W(t) = \max(0, 2t - 1) \leq t^k \leq t = \delta_M(t), \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (3.66)$$

Esta desigualdad sólo se verifica si $1 \leq t \leq 2$.

Tomando $v = 1$ en (3.65) se tiene que $C(\lambda u, \lambda) = \lambda^k C(u, 1) = \lambda^k u = (\lambda u) \lambda^{k-1}$. Denotando $u' = \lambda u$ y $v' = \lambda$, se tiene que $C(u', v') = u' v'^{k-1}$, cuando $u' \leq v'$. Del mismo modo, si $u = 1$ se prueba que $C(u', v') = u'^{k-1} v'$, cuando $v' \leq u'$. Por lo tanto C es una cópula de la familia de Cuadras–Augé con $\theta = 2 - k$. \square

Definición 3.7. La cópula C es *cóncava* si para todos $(a, b), (c, d)$ de \mathbb{I}^2 y todos los λ de \mathbb{I} se verifica

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \geq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d). \tag{3.67}$$

De forma análoga, C es *convexa* si se verifica

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \leq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d). \tag{3.68}$$

Teorema 3.12 (Caracterización de las cópulas cóncavas y convexas). *M es la única cópula cóncava y W es la única cópula convexa.*

Las propiedades de concavidad y convexidad son demasiado fuertes para las cópulas. Por ello, se propuso la siguiente definición.

Definición 3.8. La cópula C es *quasi-cóncava* si para todos $(a, b), (c, d)$ de \mathbb{I}^2 y todos los λ de \mathbb{I} se verifica

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \geq \min \{C(a, b), C(c, d)\}. \tag{3.69}$$

C es *quasi-convexa* si se verifica

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \leq \max \{C(a, b), C(c, d)\}. \tag{3.70}$$

Teorema 3.13 (Caracterización de las cópulas quasi-cóncavas y quasi-convexas). *Sea C una cópula y sea L_t la función cuyo grafo es $L_t(u) = \sup \{v \in \mathbb{I} | C(u, v) = t\}$, $\forall u \in \mathbb{I}$. Entonces C es quasi-cóncava si y sólo si la función L_t es convexa para todo $t \in [0, 1)$. Por otro lado, la única cópula quasi-convexa es W .*

Demostración. La demostración se puede ver en [1]. \square

Otra posible definición es la de cópula *Schur-cóncava* y *Schur-convexa*, que permite que las combinaciones lineales convexas de cópulas Schur-cóncavas sigan siendo Schur-cóncavas.

Definición 3.9. La cópula C es *Schur-cóncava* si para todo a, b, λ en \mathbb{I}^2 se verifica

$$C(a, b) \leq C(\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda b + (1 - \lambda)d). \tag{3.71}$$

C es *Schur-convexa* si se verifica

$$C(a, b) \geq C(\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda b + (1 - \lambda)d). \quad (3.72)$$

Además la propiedad de Schur- no está implicada ni implica la propiedad de quasi-. En [59] puede verse más acerca de esta cuestión.

3.5. Construcción de cópulas multivariantes

La construcción de cópulas multivariantes es mucho más complicada que la construcción de 2-cópulas. Ciertos métodos ya vistos tienen sus análogos n -dimensionales, con sus correspondientes complicaciones en los cálculos:

Método de inversión: Consiste en explotar el Teorema de Sklar n -dimensional, pero con la desventaja de que, para obtener la cópula, primero hay que conocer la distribución conjunta.

Método de las sumas convexas y mixturas: Lo que hacemos es extender la idea del caso bidimensional. Para las sumas convexas no hay nada complicado y para las mixturas ahora habrá que considerar más parámetros. Si cada parámetro modela la dependencia entre dos variables y tenemos n variables, necesitaremos $\binom{n}{2}$ parámetros, con lo cual las integrales serán sobre $\binom{n}{2}$ dimensiones. Esto puede acarrear graves problemas de cálculo si n es “algo grande”.

Sin embargo, el resto de métodos geométricos, así como el algebraico, no tienen buenos análogos n -dimensionales.

Una posible forma de construir n -cópulas mediante 2-cópulas es ir emparejando cópulas de forma iterativa, es decir, reemplazar uno de los argumentos de la 2-cópula por una 2-cópula de forma sucesiva.

Ejemplo 3.13. Las siguientes funciones son 3-cópulas:

- $C(u, v, w) = \Pi(M(u, v), w) = w \min(u, v)$.
- $C(u, v, w) = M(M(u, v), w) = \min(u, v) - \min(u, v, 1 - w)$.

Esto es consecuencia del Teorema 3.14. ◇

Sin embargo, la utilidad de esta técnica es limitada y suele fallar. Por ejemplo, $C(u, v, w) = W(W(u, v), w) = \max(u + v + w - 2, 0) = W^3(u, v, w)$ no es una cópula (ver Proposición 2.2). Para buscar el tipo de cópulas que pueden usarse en el método de emparejar 2-cópulas, se propone la siguiente definición.

Definición 3.10. Si C_1 y C_2 son 2-cópulas tales que $C_2(C_1(u, v), w)$ es una 3-cópula, diremos que C_1 es *directamente compatible* con C_2 .

Notemos que C_1 directamente compatible con C_2 no es lo mismo que C_2 directamente compatible con C_1 .

Teorema 3.14. *Se cumple:*

- I. Toda 2-cópula C es directamente compatible con Π .
- II. La única 2-cópula directamente compatible con M es M .
- III. La única 2-cópula directamente compatible con W es W .
- IV. M es directamente compatible con cualquiera 2-cópula C .
- V. W es directamente compatible sólo con Π .
- VI. Π es directamente compatible con una 2-cópula C si y sólo si para todo v_1, v_2, w_1, w_2 en \mathbb{I} tal que $v_1 \leq v_2$ y $w_1 \leq w_2$, la función $u \mapsto V_C([uv_1, uv_2] \times [w_1, w_2])$ es no decreciente en \mathbb{I} .

Demostración. Se puede encontrar en [64]. □

Una clase de cópulas para la cual el método de emparejar 2-cópulas suele funcionar es la clase de las cópulas Arquimedianas, tratadas en el siguiente capítulo.

Una subclase particular de ellas es la generalización de la *mezcla de potencias* de Marshall–Olkin, vista en el Ejemplo 3.8. De forma análoga a lo visto allí, se puede ver que

$$F(x_1, \dots, x_n) = \phi(\phi^{-1}(F_1(x_1)) + \dots + \phi^{-1}(F_n(x_n))) \quad (3.73)$$

es una distribución multivariante y que

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi(\phi^{-1}(u_1) + \dots + \phi^{-1}(u_n)) \quad (3.74)$$

es una n -cópula, siendo ϕ la transformada de Laplace de alguna variable aleatoria. En el siguiente capítulo se verá cuán importante es que ϕ sea una transformada de Laplace en las n -cópulas Arquimedianas.

El Teorema 3.15 [30] muestra la imposibilidad de usar el Teorema de Sklar bidimensional con marginales multidimensionales para construir una cópula multidimensional. Cuando la cópula C considerada en el anterior Teorema es Π o M , se obtienen los resultados recogidos en el Teorema 3.16 [72].

Teorema 3.15. Sean m y n enteros positivos tales que $m + n \geq 3$ y supongamos que C es una 2-cópula tal que $H(\vec{x}, \vec{y}) = C(F(\vec{x}), G(\vec{y}))$ es una función de distribución $(m+n)$ -dimensional con marginales $H(\vec{x}, \vec{\infty}) = F(\vec{x})$ y $H(\vec{\infty}, \vec{y}) = G(\vec{y})$ para todas las distribuciones m -dimensionales F y todas las distribuciones n -dimensionales G .

Entonces $C = \Pi$.

Teorema 3.16. Sean m y n enteros ≥ 2 . Sea C_1 una m -cópula y C_2 una n -cópula,

I. Sea la función $C : \mathbb{I}^{m+n} \rightarrow \mathbb{I}$ dada por

$$C(x_1, \dots, x_{m+n}) = M(C_1(x_1, \dots, x_m), C_2(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})). \quad (3.75)$$

Entonces C es una $(m+n)$ -cópula si y sólo si $C_1 = M^n$ y $C_2 = M^n$.

II. Sean C' , C'' y C''' las funciones definidas por

$$C'(x_1, \dots, x_{m+1}) = \Pi(C_1(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}), \quad (3.76)$$

$$C''(x_1, \dots, x_{n+1}) = \Pi(x_1, C_1(x_2, \dots, x_{n+1})), \quad (3.77)$$

$$C'''(x_1, \dots, x_{m+n}) = \Pi(C_1(x_1, \dots, x_m), C_1(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})). \quad (3.78)$$

Entonces C' es siempre una $(m+1)$ -cópula, C'' es siempre una $(n+1)$ -cópula y C''' es siempre una $(m+n)$ -cópula.

Los anteriores teoremas ilustran el **problema de la compatibilidad**, que surge al ser las $\binom{n}{k}$ k -marginales de una cópula n -dimensional C k -cópulas pero no verificarse el recíproco. Es decir, que **dadas $\binom{n}{k}$ k -cópulas arbitrarias, raramente son las k -marginales de una n -cópula**. En el caso en que lo sean, esas $\binom{n}{k}$ k -cópulas se dice que son *compatibles*. El estudio de cópulas compatibles tiene un largo bagaje y aparecen diferentes clases de problemas según n y según el número de marginales fijas: $C^3(C_{12})$, $C(C_{12}, C_{13})$, $C^4(C_{123}, C_{124}, C_{134}, C_{234})$, ... El estudio de estos problemas a menudo se efectúa desde la teoría de las Clases de Fréchet, como puede verse en [36], y muchos de ellos están todavía sin resolver.

Capítulo 4

Cóputas Arquimedianas

En este capítulo se presenta la clase de las cóputas Arquimedianas, sus propiedades características y la revisión, en este nuevo contexto, de conceptos ya vistos, como el orden y las componentes de una cóputa. En la última sección, se verá la extensión a las cóputas Arquimedianas multivariantes.

4.1. Definición

Las cóputas Arquimedianas son una clase especial de cóputas construidas a partir de una función *generatriz* $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$, de modo que la transformación por φ de la cóputa C se expresa de la forma: $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$. El objetivo de esta sección es buscar las características necesarias de las funciones φ para que generen cóputas.

Lo primero que se necesita es definir una inversa generalizada de φ , de la misma forma que se definían las inversas generalizadas para funciones de distribución en el Capítulo 1.

Definición 4.1. Sea $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente y tal que $\varphi(1) = 0$. Se define la *pseudo-inversa* de φ como la función $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{I}$ definida por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} . \quad (4.1)$$

El rango de φ es $\text{Ran}\varphi = [0, \varphi(0)]$ y por ser estrictamente decreciente, tiene imagen inversa para todos los elementos de su rango. El problema surge si buscamos la imagen inversa de un elemento que no pertenece al rango, es decir, a $(\varphi(0), \infty]$. En ese caso asignamos como imagen inversa el 0.

Observación 4.1. $\varphi^{[-1]}$ no es más que la extensión de $\varphi^{-1} : [0, \varphi(0)] \rightarrow \mathbb{I}$ a $[0, \infty]$. Por ese motivo, $\varphi^{[-1]}$ es continua y no decreciente¹ y además se verifica:

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u, \quad \forall u \in \mathbb{I}, \tag{4.2}$$

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} = \min(t, \varphi(0)). \tag{4.3}$$

Si $\varphi(0) = \infty$, entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ y es estrictamente decreciente. ◁

Los próximos lemas están destinados a probar el Teorema 4.1, que nos permitirá asegurar cuándo $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ es una cópula.

Lema 4.1. *Sea $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente y tal que $\varphi(1) = 0$. Sea la función $C : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ definida por*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \tag{4.4}$$

Entonces C satisface las condiciones de contorno I y II de la definición de cópula.

Demostración. Es una sencilla comprobación:

I. $C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$ porque $\varphi(0) \leq \varphi(u) + \varphi(0)$. Para v es análogo.

II. $C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ y análogamente para v .

□

Lema 4.2. *Sean φ y C en las hipótesis del Lema 4.1. Entonces C es 2–creciente si y sólo si se verifica*

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1, \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{I} : u_1 \leq u_2. \tag{4.5}$$

Demostración. Otra forma de expresar (4.5) es mediante

$$V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) = u_2 - C(u_2, v) - u_1 + C(u_1, v) \geq 0.$$

Entonces si C es 2–creciente, se cumple (4.5). Supongamos ahora que se verifica (4.5) y veamos que C es 2–creciente. Sean $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ en \mathbb{I} y observemos que $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq C(1, v_2)$. Como C es continua al serlo φ y $\varphi^{[-1]}$, existe un $t \in \mathbb{I}$ tal que $C(t, v_2) = v_1$, es decir tal que $\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1)$. Por lo tanto:

$$C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1))$$

¹ φ^{-1} es continua y estrictamente decreciente en $\text{Ran}\varphi = [0, \varphi(0)]$, pero $\varphi^{[-1]}$ no puede ser estrictamente decreciente siempre, pues a partir de $\varphi(0)$ es constante.

$$\begin{aligned}
 &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\
 &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\
 &\stackrel{(4.5)}{\leq} C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2).
 \end{aligned}$$

Y así se prueba que C es 2-creciente. □

Teorema 4.1. *Sea $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente y tal que $\varphi(1) = 0$. Entonces la función $C : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ definida por*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{4.6}$$

es una cópula si y sólo si φ es convexa.

Demostración. Por el Lema 4.1 ya sabemos que C verifica las condiciones de contorno y por el Lema 4.2 C será 2-creciente si se verifica (4.5). Buscaremos una condición equivalente que sea más útil. Por como está definida C , se tiene:

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)), \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{I} : u_1 \leq u_2. \tag{4.7}$$

Si denotamos $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ y $c = \varphi(v)$, entonces $a \geq b$, $c \geq 0$ y (4.5) equivale a:

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c). \tag{4.8}$$

Supongamos que se verifica (4.8), es decir, que C es 2-creciente y por tanto cópula. Eligiendo cualquier $s, t \in [0, \infty]$ tal que $0 \leq s < t$, denotando $a = \frac{s+t}{2}$, $b = s$ y $c = \frac{t-s}{2}$ y sustituyendo en (4.8), se tiene:

$$\varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}. \tag{4.9}$$

Al verificar $\varphi^{[-1]}$ (4.9) se dice que es *medio-convexa* y al ser continua, se sigue que $\varphi^{[-1]}$ es convexa (Proposición A.2).

Recíprocamente, supongamos que φ es convexa y veamos que C es una cópula. Al ser φ convexa, también lo es $\varphi^{[-1]}$ (por ser *casi* la inversa). Tomando $a \geq b$, $c \geq 0$ y $\gamma = a - ba - b + c$, entonces $a = (1 - \gamma)b + \gamma(a + c)$ y $b + c = \gamma b + (1 - \gamma)(a + c)$ y al ser $\varphi^{[-1]}$ convexa:

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a + c), \tag{4.10}$$

$$\varphi^{[-1]}(b + c) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(a + c). \tag{4.11}$$

Sumando estas dos desigualdades se obtiene (4.8) y, por tanto, C es una cópula. □

Ahora que ya está probado que este tipo de funciones son cópulas podemos dar la definición correspondiente.

Definición 4.2. Dada una función $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ continua, estrictamente decreciente, convexa² y tal que $\varphi(1) = 0$, se define la *cópula Arquimediana generada por φ* como

$$C_\varphi(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \tag{4.12}$$

A φ se le llamará el *generador* de la cópula C_φ . Encaso de que $\varphi(0) = \infty$, diremos que φ es un generador *estricto* y que C_φ es una *cópula Arquimediana estricta*.

Se puede definir el conjunto de todos los generadores Ω :

$$\Omega = \{\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty] : \varphi \text{ cont., estr. dec., convexa y } \varphi(1) = 0\}. \tag{4.13}$$

De esta forma, las cópulas Arquimedianas se pueden ver como los miembros de la clase $\{C_\varphi\}_{\varphi \in \Omega}$, una clase muy amplia.

Observación 4.2. Una cópula Arquimediana C no determina unívocamente un único generador φ . De hecho, para $c > 0$, $c\varphi$ también es generador de la cópula C_φ , pues

$$(c\varphi)^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}\left(\frac{t}{c}\right), & 0 \leq t \leq c\varphi(0) \\ 0, & c\varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}. \tag{4.14}$$

De este modo $C_{c\varphi}(u, v) = (c\varphi)^{[-1]}(c(\varphi(u) + \varphi(v))) = C_\varphi(u, v)$, para todos los $u, v \in \mathbb{I}$.

◁

Los siguientes ejemplos muestran algunas familias de cópulas Arquimedianas importantes.

Ejemplo 4.1. Sea $\varphi(t) = (-\log t)^\theta$, donde $\theta \geq 1$. Claramente φ es continua y $\varphi(1) = 0$. Como $\varphi'(t) = -\theta(-\log t)^{\theta-1} \frac{1}{t} < 0$ y $\varphi''(t) \geq 0$, φ es una función estrictamente decreciente y convexa de \mathbb{I} en $[0, \infty]$. Además $\varphi(0) = \infty$, con lo cual φ es un generador estricto con inversa dada por $\varphi^{-1}(t) = \exp\left((-t)^{\frac{1}{\theta}}\right)$. La cópula Arquimediana que genera φ es:

$$C_\theta(u, v) = \exp\left(-\left[(-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right). \tag{4.15}$$

Esta es la *familia de cópulas de Gumbel*, presentada ya en el Ejemplo 1.9. Como casos especiales tiene a $C_1 = \Pi$ (independencia) y a $C_\infty = M$ (dependencia perfecta positiva). Por eso es una familia que modela bien la dependencia positiva entre dos variables. ◊

Ejemplo 4.2. Sea $\varphi(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$, donde $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. Si $\theta > 0$, φ es un generador

²Al ser φ convexa y continua, su derivada φ' existirá en casi todo punto.

estricto y la cópula que genera es

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}. \tag{4.16}$$

En general, φ no es un generador estricto y la cópula asociada es:

$$C_\theta(u, v) = \max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0\right). \tag{4.17}$$

Esta familia se conoce como la *familia de Clayton*, y tiene como casos particulares, a $C_{-1} = W$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$ y $C_\infty = M$. Normalmente se suele usar (4.16) porque se desea trabajar con generadores estrictos. \diamond

Ejemplo 4.3. Sea $\varphi(t) = -\log \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$, donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta es la *familia de Frank*:

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right). \tag{4.18}$$

Las cópulas son estrictas y $C_{-\infty} = W$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$ y $C_\infty = M$. Además, los miembros de la familia de Frank son las únicas cópulas Arquimedianas que satisfacen la ecuación $C = \widehat{C}$ para la simetría radial [25]. \diamond

4.2. Propiedades

Las cópulas Arquimedianas, debido a su estructura, tienen importantes propiedades y caracterizaciones. Su nombre se debe a la propiedad Arquimediana, que se expone al final de la sección.

Teorema 4.2. *Sea C una cópula Arquimediana con generador φ . Entonces:*

- I. C es simétrica.
- II. C es asociativa, es decir: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$, $\forall u, v, w \in \mathbb{I}$.
- III. $C(u, u) < u$, $\forall u \in (0, 1)$.

Demostración. La primera propiedad es obvia. Comprobemos la segunda:

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u, v)) + \varphi(w)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(C(v, w))) = C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

Para la tercera,

$$C(u, u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) = \begin{cases} \varphi^{-1}(2\varphi(u)), & 0 \leq 2\varphi(u) \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq 2\varphi(u) < \infty \end{cases}.$$

Si $2\varphi(u) \geq \varphi(0)$, $C(u, u) = 0$, menor que $u \in (0, 1)$. Supongamos que $2\varphi(u) \geq \varphi(0)$, entonces, como φ^{-1} es decreciente y $2\varphi(u) > \varphi(u)$, $\varphi^{-1}(2\varphi(u)) < \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u$. \square

Las dos últimas propiedades son tan importantes que pueden servir para caracterizar a las cópulas Arquimedianas, tal y como se verá más adelante.

Los conjuntos de nivel de las cópulas Arquimedianas van a jugar un papel importante también, pues a través de ellos podremos ver qué cópulas Arquimedianas son absolutamente continuas y cuales tienen componentes singulares. Los conjuntos de nivel son $\{(u, v) \in \mathbb{I} : C(u, v) = t\}$, es decir, los puntos que verifican $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$. Esta igualdad se puede escribir como

$$v = L_t(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u)), \tag{4.19}$$

y así expresamos v como función de u . Si $t > 0$, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, con lo que es adecuado llamar a estos conjuntos *curvas de nivel*. Para $t = 0$, el conjunto no es una curva, aunque lo englobamos en el término. El siguiente teorema establece la convexidad de las curvas de nivel.

Teorema 4.3. *Los conjuntos (curvas) de nivel de una cópula Arquimediana son convexos.*

Demostración. Sea una cópula Arquimediana con generador φ . Para $t \in [0, 1)$, las curvas de nivel de C están dadas por $v = L_t(u)$. Si probamos que L_t es medio-convexa, entonces como es continua, también será convexa. Como φ es convexa, tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &\geq \varphi(t) - \frac{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)}{2} \\ &= \frac{[\varphi(t) - \varphi(u_1)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Usando que φ^{-1} es decreciente y convexa y (4.20), se tiene:

$$\begin{aligned} L_t\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \varphi^{-1}\left(\varphi(t) - \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right) \\ &\leq \varphi^{-1}\left(\frac{[\varphi(t) - \varphi(u_1)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} [\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u_1)) + \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u_2))] \\ &= \frac{L_t(u_1) + L_t(u_2)}{2}. \end{aligned}$$

Notemos que hemos tomado φ^{-1} en vez de $\varphi^{[-1]}$ porque $\varphi(t) - \varphi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \in [0, \varphi(0))$. \square

4.2.1. Componentes de una cópula Arquimediana

Como una cópula Arquimediana está determinada por su generador, el cálculo de la densidad y la descomposición en componentes depende del generador y de las propiedades que tenga.

Teorema 4.4. *Sea $\varphi \in \Omega$. Si existe la derivada segunda φ'' para los puntos (u, v) tales que $\varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0)$, la densidad de la cópula Arquimediana asociada C en tales puntos viene dada por*

$$c(u, v) = -\frac{\varphi'(u)\varphi'(v)\varphi''(C(u, v))}{[\varphi'(C(u, v))]^3}. \tag{4.21}$$

Además, si $\varphi(0) = \infty$, la densidad está definida para todo $(u, v) \in \mathbb{I}$ y por tanto C es absolutamente continua. Si $\varphi(0) < \infty$, entonces la cópula tendrá componente singular, que está concentrada en la curva de nivel de 0

$$\{(u, v) \in \mathbb{I} : \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)\}, \tag{4.22}$$

con una masa de probabilidad $-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}$.

Demostración. Derivando $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ con respecto a u y v se tiene:

$$\varphi'(C(u, v))\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \varphi'(u) \text{ y } \varphi'(C(u, v))\frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\varphi'(u)}{\varphi'(C(u, v))} \right) = -\frac{\varphi'(u)\varphi''(C(u, v))\frac{\partial C(u, v)}{\partial v}}{[\varphi'(C(u, v))]^2} \\ &= -\frac{\varphi'(u)\varphi'(v)\varphi''(C(u, v))}{[\varphi'(C(u, v))]^3}. \end{aligned}$$

Si $\varphi = \infty$, $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = -\frac{\varphi'(u)\varphi'(v)\varphi''(C(u, v))}{[\varphi'(C(u, v))]^3}$ y por tanto $C = A_C$. Si $\varphi(0) < \infty$, el conjunto donde la componente absolutamente continua no está definida es (4.22). Denotando a este conjunto por A y al conjunto $\{(u, v) \in \mathbb{I} : \varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0)\}$ por B , tenemos:

$$\mathbb{P}\{A\} = 1 - \mathbb{P}\{B\} = 1 - \int \int_{\varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0)} c(u, v) du dv$$

Aplicando el cambio de variable $\begin{cases} s = C(u, v) \\ t = u \end{cases}$, se tiene que $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| = \frac{\varphi'(t)}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(s) - \varphi(t)))}$ y

por tanto:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{A\} &= 1 - \int_0^1 \int_0^t -\frac{\varphi'(t)\varphi''(s)}{\varphi'(s)^2} ds dt \\
 &= 1 + \int_0^1 \varphi'(t) dt \int_0^t \frac{\varphi''(s) ds}{\varphi'(s)^2} \\
 &= 1 - \int_0^1 \varphi'(t) dt \left[\frac{1}{\varphi'(t)} - \frac{1}{\varphi'(0)} \right] \\
 &= 1 - \left(1 + \frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} \right) = -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}.
 \end{aligned}$$

□

En la descomposición, los conjuntos de nivel son clave:

- **Conjunto de nivel de 0:** Donde está definida S_C si $\varphi(0) < \infty$.
- **Resto de \mathbb{I}^2 :** Donde está definida A_C siempre. Si $\varphi(0) = \infty$ este conjunto es \mathbb{I}^2 y C es absolutamente continua.

Por eso es interesante tomar **generadores estrictos**, porque **generarán cópulas absolutamente continuas**.

El Teorema 4.5 generaliza el teorema anterior, de forma que no hay que exigir que φ sea dos veces diferenciable. Su demostración se puede ver en [1] o en [59].

Teorema 4.5. *Sea C una cópula Arquimediana generada por $\varphi \in \Omega$.*

- I. *Para $t \in (0, 1)$, el C -volumen de la curva de nivel $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ viene dado por $\varphi(t) \left[\frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)} \right]$. En particular, si $\varphi'(t)$ existe, entonces el C -volumen es 0.*
- II. *Si C no es estricta, entonces el C -volumen de la curva $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$ es igual a $-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}$ y por tanto igual a 0 si $\varphi'(0^+) = -\infty$.*

4.2.2. Distribución de $C(U, V)$

El Teorema 4.6 proporciona una serie de resultados muy interesantes. Va a permitir la simulación de cópulas Arquimedianas de una forma sencilla (Capítulo 5), guarda relación con la medida de dependencia Tau de Kendall (Capítulo 6) y establece la base teórica para el método de estimación de cópulas Arquimedianas de Genest y Rivest (Capítulo 7). Además, el segundo resultado ofrece un modo sencillo de calcular el C -volumen de un conjunto de nivel, otra forma de ver la ecuación (4.21).

Teorema 4.6. *Sea (U, V) un vector aleatorio de una cópula Arquimediana C , con generador $\varphi \in \Omega$. Sean $W = \frac{\varphi(U)}{\varphi(U) + \varphi(V)}$ y $Z = C(U, V)$. Entonces:*

I. W tiene distribución uniforme en $(0, 1)$.

II. Z tiene por distribución a

$$K_C(z) = z - \lambda(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}. \tag{4.23}$$

En otras palabras, $K_C(t)$ es el C -volumen del todos los conjuntos de nivel por debajo de t :

$$K_C(t) = V_C(\{(u, v) \in \mathbb{I} : C(u, v) \leq t\}). \tag{4.24}$$

III. Z y W son independientes.

Demostración. Lo demostraremos para el caso en que C sea absolutamente continua. El caso general se puede ver en [32]. Sea $c(u, v)$ la densidad de (U, V) , y G la distribución de (W, Z) , $G(w, z) = \mathbb{P}\{W \leq w, Z \leq z\}$. Veamos que (W, Z) es absolutamente continuo usando un cambio de variable. La transformación inversa de

$$g : \begin{cases} W = \frac{\varphi(U)}{\varphi(U) + \varphi(V)} \\ Z = C(U, V) = \varphi^{-1}(\varphi(U) + \varphi(V)) \end{cases} \tag{4.25}$$

está dada por

$$h : \begin{cases} U = \varphi^{-1}(W\varphi(Z)) \\ V = \varphi^{-1}((1 - W)\varphi(Z)) \end{cases} . \tag{4.26}$$

Por tanto la transformación g es biyectiva y además el jacobiano de la inversa h no se anula en ningún punto $(w, z) \in (0, 1) \times (0, 1)$:

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(w, z)} \right| = \left| \frac{\varphi(z)\varphi'(z)}{\varphi'(\varphi^{-1}(w\varphi(z)))\varphi'(\varphi^{-1}((1-w)\varphi(z)))} \right| = -\frac{\varphi(z)\varphi'(z)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} > 0. \tag{4.27}$$

Entonces (W, Z) es un vector aleatorio absolutamente continuo y su densidad está dada por $g(w, z) = c(u, v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(w, z)} \right|$, con lo que podemos calcular la distribución G :

$$\begin{aligned} G(w, z) &= \int_0^w \int_0^z g(s, t) dt ds = \int_0^w \int_0^z c(u, v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| dt ds \\ &= \int_0^w \int_0^z \frac{-\varphi'(u)\varphi'(v)\varphi''(C(u, v))}{[\varphi'(C(u, v))]^3} \left(-\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(u)\varphi'(v)} \right) dt ds \\ &= \int_0^w \int_0^z \frac{\varphi(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} dt ds = \int_0^w ds \int_0^z \frac{\varphi(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} dt \\ &= w \left[t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right]_0^z = wK_C(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $W \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $Z \sim K_C$ y W y Z son independientes. □

Según lo visto, una cópula Arquimediana con generador φ produce la distribución K de $Z = C(U, V)$ mediante (4.23). Bajo ciertas condiciones, la distribución K de $Z = C(U, V)$, siendo C una cópula cualquiera, produce una cópula Arquimediana a través de su generador. El resultado siguiente, debido a [30], establece las condiciones suficientes y necesarias para que eso ocurra.

Proposición 4.1. *Sea $K(z) = z - \lambda(z)$ la distribución de $Z = C(U, V)$, y $K(u^-) = \lim_{t \rightarrow u^-} K(t)$. Entonces $\varphi(u) = \exp \left\{ \int_{u_0}^u \frac{1}{\lambda(t)} dt \right\}$, con $0 < u_0 < 1$ constante, es un generador si y sólo si $K(u^-) > u$ para todo $0 < u < 1$.*

4.2.3. Extensión de cópulas Arquimedianas por transformaciones

Como las cópulas Arquimedianas se expresan a través de generadores, es útil poder conseguir nuevos generadores a partir de otros ya existentes. Se trata de un problema de análisis que no está de más recordar.

Teorema 4.7. *Sea $\varphi \in \Omega$ un generador.*

- I. *Si $g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es una función continua, cóncava, estrictamente creciente y tal que $g(1) = 1$, entonces $\varphi \circ g \in \Omega$.*
- II. *Si $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ es una función continua, convexa, estrictamente creciente y tal que $f(0) = 0$, entonces $f \circ \varphi \in \Omega$.*

Demostración. Comprobaremos que $\varphi \circ g \in \Omega$ y que $f \circ \varphi \in \Omega$. La continuidad es trivial por ser f, g y φ continuas. Por otro lado, la composición de una función estrictamente creciente con una estrictamente decreciente, en cualquier orden, es estrictamente decreciente. Además $(\varphi \circ g)(1) = (f \circ \varphi)(1) = 0$, por lo que sólo queda probar la convexidad. Sean $u, v \in \mathbb{I}$ y $\lambda \in (0, 1)$.

Para $\varphi \circ g$, por ser g cóncava,

$$g(\lambda u + (1 - \lambda)v) \geq \lambda g(u) + (1 - \lambda)g(v)$$

y al ser φ decreciente y convexa,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g)(\lambda u + (1 - \lambda)v) &\leq \varphi(\lambda g(u) + (1 - \lambda)g(v)) \\ &\leq \lambda(\varphi \circ g)(u) + (1 - \lambda)(\varphi \circ g)(v). \end{aligned}$$

Para $f \circ \varphi$, primero aplicamos que φ es convexa,

$$\varphi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)\varphi(v)$$

y luego usamos que f es creciente y convexa,

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(\lambda u + (1 - \lambda)v) &\leq f(\lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)\varphi(v)) \\ &\leq \lambda(f \circ \varphi)(u) + (1 - \lambda)(f \circ \varphi)(v). \end{aligned}$$

□

Observación 4.3. Este teorema generaliza la regla de transformación para las familias α y β que considera Nelsen [59], donde $g(t) = t^\nu$, $\nu \in (0, 1]$ y $f(\varphi) = \varphi^\delta$, $\delta \in [1, \infty)$. De esta forma, dado un generador φ ,

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) = (\varphi(t^\alpha))^\beta, \quad \beta \geq 1, 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.28}$$

es un generador. Además, como el producto de un generador por una constante positiva es un generador, y la suma de dos generadores también lo es, entonces todo **polinomio de un generador φ con coeficientes positivos**, por ejemplo $\Phi(\varphi) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi^i$, **es un generador**. ◁

Algunas transformaciones f y g que resultan interesantes son las siguientes:

- I. $g(t) = \frac{\sin(at)}{\sin(a)}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- II. $g(t) = \frac{\log(at+1)}{\log(a+1)}$, $a \in (0, \infty)$.
- III. $g(t) = \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$, $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$.
- IV. $f(\varphi) = a^\varphi - 1$, $a \in (1, \infty)$.
- V. $f(\varphi) = a^{-\varphi} - 1$, $a \in (0, 1)$.

4.2.4. Orden

A menudo es complicado determinar si dos cópulas C_1 y C_2 están ordenadas mediante su definición. Sin embargo, para las cópulas Arquimedianas, la situación cambia y podemos ordenar dos cópulas de acuerdo a las propiedades de sus generadores. El punto de partida es el Teorema 4.8 y la noción de función subaditiva.

Definición 4.3. Una función real f definida en $[0, \infty)$ es *subaditiva* si

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in [0, \infty). \tag{4.29}$$

Teorema 4.8. Sean C_1 y C_2 dos cópulas Arquimedianas con generadores φ_1 y φ_2 . Entonces $C_1 \prec C_2$ si y sólo si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es subaditiva.

Demostración. Sea $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$. f es continua, no decreciente y $f(0) = 0$. Estableceremos una equivalencia con $C_1 \prec C_2$ para probar de forma más sencilla el teorema. Por definición, $C_1 \prec C_2$ si y sólo si

$$\varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) \leq \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)), \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \tag{4.30}$$

Denotando $x = \varphi_2(u)$ y $y = \varphi_2(v)$, entonces (4.30) equivale a

$$\varphi_1^{[-1]}(f(x) + f(y)) \leq \varphi_2^{[-1]}(x + y), \quad \forall x, y \in [0, \varphi_2(0)]. \tag{4.31}$$

Supongamos que $C_1 \prec C_2$, es decir, que se cumple (4.31). Aplicando φ_1 a ambos lados de (4.31) resulta que f es subaditiva:

$$f(x) + f(y) \geq \varphi_1\left(\varphi_2^{[-1]}(x + y)\right) = f(x + y). \tag{4.32}$$

Si f es subaditiva, entonces aplicando $\varphi_1^{[-1]}$ a ambos lados de (4.29) y usando que $\varphi_1^{[-1]} \circ f = \varphi_2^{[-1]}$, se verifica (4.31), con lo que $C_1 \prec C_2$. □

El problema es que verificar la subaditividad de $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ puede ser más complicado que comprobar por la definición que C_1 es más pequeña que C_2 . Por eso vamos a ver una serie de corolarios que van a dar distintas condiciones suficientes para $C_1 \prec C_2$.

Lema 4.3. Sea f definida en $[0, \infty)$. Si f es cóncava y $f(0) = 0$, entonces f es subaditiva.

Demostración. Sean $x, y \in [0, \infty)$. Si $x + y = 0$, entonces $x = y = 0$, así que $f(0) = 0$ y se verifica (4.29). Si $x + y > 0$, consideramos:

$$x = \frac{x}{x+y}(x+y) + \frac{y}{x+y}(0) \text{ y } y = \frac{x}{x+y}(0) + \frac{y}{x+y}(x+y).$$

Al ser f cóncava y $f(0) = 0$, se cumplen:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(0) = \frac{x}{x+y}f(x+y), \\ f(y) &\geq \frac{x}{x+y}f(0) + \frac{y}{x+y}f(x+y) = \frac{y}{x+y}f(x+y). \end{aligned}$$

Sumando ambas desigualdades se tiene (4.29). □

Corolario 4.1. Si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es cóncava, entonces $C_{\varphi_1} \prec C_{\varphi_2}$.

Demostración. Trivial teniendo en cuenta el Teorema 4.8 y Lema 4.3. □

Corolario 4.2. Si $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ es no decreciente en $(0, 1)$, entonces $C_{\varphi_1} \prec C_{\varphi_2}$.

Demostración. Sea $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ y $g : t \in (0, \infty) \rightarrow g(t) = \frac{f(t)}{t} \in (0, \infty)$. Supongamos que $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ es no decreciente en $(0, 1)$. Como $g = \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) \circ \varphi_2^{[-1]}$ y $\varphi_2^{[-1]}$ es no decreciente en $[0, \infty]$, se sigue que g es no creciente en $(0, \infty)$. Entonces, para todo $x, y \geq 0$,

$$x [g(x + y) - g(x)] + y [g(x + y) - g(y)] \leq 0, \tag{4.33}$$

de lo que se deduce que

$$f(x + y) = (x + y)g(x + y) \leq xg(x) + yg(y) = f(x) + f(y). \tag{4.34}$$

Con lo cual f es subaditiva y por tanto $C_{\varphi_1} \prec C_{\varphi_2}$. □

Corolario 4.3. Si φ_1 y φ_2 son continuamente diferenciables en $(0, 1)$ y $\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}$ es no decreciente en $(0, 1)$, entonces $C_{\varphi_1} \prec C_{\varphi_2}$.

Demostración. Sean $g = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ y $f = \frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}$ y supongamos que f es no decreciente. Al ser φ_1 y φ_2 decrecientes en $(0, 1)$, φ_1' y φ_2' son negativas en $(0, 1)$. Probaremos el resultado viendo que g es no decreciente en $(0, 1)$ y aplicando el Corolario 4.2. La derivada de g es

$$g' = \frac{\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2^2} = \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = (f - g) \frac{\varphi_2'}{\varphi_2}. \tag{4.35}$$

Como $\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}$ es negativo, hay que probar que $f(t) - g(t) \leq 0$, para $t \in (0, 1)$. Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe un $t_0 \in (0, 1)$ tal que $f(t_0) - g(t_0) > 0$. Al ser f continua, $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$ existe (siendo finito o infinito). Como $\lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \varphi_2(t) = 0$, hay una indeterminación, y se puede aplicar la regla de l'Hôpital, con lo que $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t)$. Entonces:

$$g(t_0) < f(t_0) \leq \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t). \tag{4.36}$$

Por (4.35), $g'(t_0) < 0$ y existirá un $t_1 \in (t_0, 1)$ tal que $g'(t_1) = 0$ y $g(t_1) < g(t_0)$ (ver en la Figura 4.1). Así $g(t_1) < g(t_0) < f(t_0) \leq f(t_1)$ y por (4.35), $g'(t_1) < 0$, una contradicción con $g'(t_1) = 0$. □

El Corolario 4.3 es normalmente el más sencillo de usar. Veamos algunos ejemplos de la aplicación de estos resultados.

Ejemplo 4.4. Sean C_1 y C_2 cópulas de la familia de Gumbel del Ejemplo 4.1. Si los generadores son $\varphi_k(t) = (-\log t)^{\theta_k}$ para $k = 1, 2$, entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(t) = t^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}$ y así si

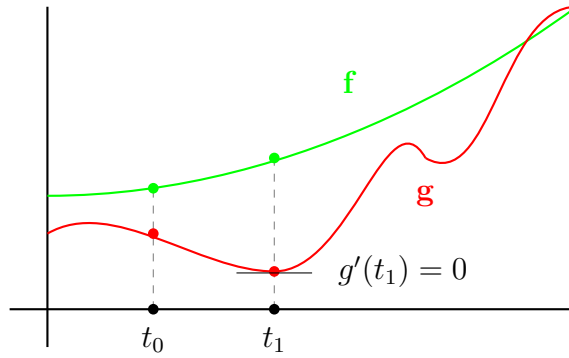


Figura 4.1: Gráfica de f y g en el Corolario 4.3.

$\theta_1 \leq \theta_2$, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es cóncava y, por el Corolario 4.1, $C_1 \prec C_2$. La familia de Gumbel está positivamente ordenada. \diamond

Ejemplo 4.5. Sean C_1 y C_2 cópulas de la familia de Clayton, presentada en el Ejemplo 4.2. Si los generadores son $\varphi_k(t) = \frac{t^{-\theta_k}-1}{\theta_k}$ para $k = 1, 2$, entonces $\frac{\varphi_1'(t)}{\varphi_2'(t)} = t^{\theta_2-\theta_1}$. Si $\theta_1 \leq \theta_2$, $\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}$ es no decreciente en $(0, 1)$ con lo que $C_1 \prec C_2$ (Corolario 4.3). La familia de Clayton está positivamente ordenada. \diamond

4.2.5. Caracterizaciones

Las cópulas Arquimedianas pueden ser caracterizadas por sus propiedades, existiendo dos teoremas a tal efecto. El primero se debe a Genest y MacKay [28] y su demostración requiere de una identidad relacionada con las funciones simétricas de dos variables probada por Abel en 1826, por lo que se le conoce como el criterio de Abel para cópulas.

Teorema 4.9 (Criterio de Abel para cópulas). *Una cópula C es Arquimediana si y sólo si existe una función $f : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ tal que*

$$\frac{\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}}{\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}} = \frac{f(u)}{f(v)}, \quad \forall u, v \in (0, 1). \tag{4.37}$$

En caso de ser Arquimediana, el generador viene dado por

$$\varphi(t) = \int_t^1 f(u)du. \tag{4.38}$$

El otro resultado se debe a Ling [47], y caracteriza a las cópulas Arquimedianas por su asociatividad y sus diagonales dominadas (Teorema 4.2).

Teorema 4.10 (Teorema de Ling). *Una cópula C es Arquimediana si y sólo si verifica las siguientes dos condiciones:*

- I. *Asociatividad:* $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)), \forall u, v, w \in \mathbb{I}$.
- II. $\forall u \in (0, 1), C(u, u) < u$.

4.2.6. Propiedad Arquimediana

Recordemos algunas de las versiones de la propiedad Arquimediana³ de los números reales, recogidas en la siguiente proposición:

Proposición 4.2 (Propiedad Arquimediana). *Los siguientes enunciados se verifican y son equivalentes:*

- I. *Sea un x un número real positivo. Entonces existe un número natural n tal que $n > x$.*
- II. *Si x e y son números reales positivos, entonces existe un natural n tal que $nx > y$.*
- III. *Si x e y son números reales positivos, entonces existe un natural n tal que $\frac{x}{n} < y$.*

Una cópula se comporta como una operación binaria en \mathbb{I} , ya que una cópula C asigna a cada par $u, v \in \mathbb{I}$ un número $C(u, v) \in \mathbb{I}$. Para el caso de las cópulas Arquimedianas esta operación es conmutativa y asociativa, además de preservar el orden:

$$C(u_1, v_1) \leq C(u_2, v_2), \quad u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2. \tag{4.39}$$

Estas propiedades hacen de (\mathbb{I}, C) un *grupo Abelian ordenado*. Definiendo adecuadamente la operación “división por n ”, se verifica la Propiedad Arquimediana, de forma análoga a su versión III, lo que justifica el término de *cópulas Arquimedianas*.

Definición 4.4. Para cualquier $u \in \mathbb{I}$, se definen las C -potencias de u de forma recursiva:

$$\begin{cases} u_C^1 = u \\ u_C^n = C(u, u_C^{n-1}), n \geq 2 \end{cases} \tag{4.40}$$

Las C -potencias son sencillas de calcular si la cópula es Arquimediana.

Proposición 4.3. *Si C es Arquimediana, $u_C^n = \varphi^{[-1]}(n\varphi(u))$ para $n \geq 1$.*

Demostración. SE prueba por inducción. Supongamos que la cópula C está generada por $\varphi \in \Omega$, para $n = 1$ y $n = 2$ es trivial:

$$u_C^1 = u = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) \text{ y } u_C^2 = C(u, u_C^1) = C(u, u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) = u.$$

³También conocida como *axioma Arquimediano*, aunque en realidad no sea un axioma, sino una consecuencia del axioma del supremo.

Supongamos que se cumple para n y veamos que es cierto para $n + 1$:

$$u_C^{n+1} = C(u, u_C^n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + n\varphi(u)) = \varphi^{[-1]}((n + 1)\varphi(u)). \tag{4.41}$$

Luego $u_C^n = \varphi^{[-1]}(n\varphi(u))$ para $n \geq 1$. □

Teorema 4.11 (Propiedad Arquimediana para cópulas). *Sea C una cópula Arquimediana. Para todo $u, v \in (0, 1)$ existe un entero positivo n tal que $u_C^n < v$.*

Demostración. Supongamos que la cópula C está generada por $\varphi \in \Omega$. Sean $u, v \in (0, 1)$, como $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$, el axioma Arquimediano implica que hay un entero n tal que $n\varphi(u) > \varphi(v)$. Entonces, como $\varphi^{[-1]}$ es estrictamente decreciente en $(0, \varphi(0))$ y al ser $v > 0$, $\varphi(v) < \varphi(0)$, se tiene:

$$v = \varphi^{[-1]}(\varphi(v)) > \varphi^{[-1]}(n\varphi(u)) = u_C^n. \tag{4.42}$$

□

4.3. Cópulas Arquimedianas multivariantes

Parece natural que la extensión de una 2-cópula Arquimediana a una n -cópula Arquimediana sea la función

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \tag{4.43}$$

Estas funciones C_n se pueden construir de forma iterativa, haciendo uso de la propiedad asociativa de las cópulas Arquimedianas. Dada una 2-cópula Arquimediana C , podemos definir

$$\begin{cases} C_2(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) \\ C_n(u_1, \dots, u_n) = C(C_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n), n > 2 \end{cases} \tag{4.44}$$

Recordemos que este método se había visto ya en la Sección 3.5 cuando se construían cópulas multivariantes. Allí se veía que fallaba de forma general y por eso era necesario introducir la condición de que las cópulas fuesen directamente compatibles. El objetivo ahora es buscar las condiciones para la función φ que aseguren que (4.43) es una n -cópula, del mismo modo que con las 2-cópulas exigíamos que φ fuese, entre otras cosas, convexa. Para ello necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 4.5. Una función real f se dice d -monótona en un intervalo $I \subset \overline{\mathbb{R}}$, con $d \geq 2$

si es continua y derivable en él hasta el orden $d - 2$ y las derivadas satisfacen:

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad \forall x \in I, k = 0, 1, \dots, d - 2. \tag{4.45}$$

siendo además $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}$ no creciente y convexa en I . Es decir, si f se pudiese derivar dos veces más, cumpliría $(-1)^{d-1} f^{(d-1)} \geq 0$ y $(-1)^d f^{(d)} \geq 0$. Si $d = 1$, f se dice 1-monótona en I si es no negativa y no creciente en I .

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en I y si éstas satisfacen:

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad \forall x \in I, k = 0, 1, \dots \tag{4.46}$$

entonces f se dice *completamente monótona*.

Proposición 4.4. *Si una función f es d -monótona con $d \geq 2$, entonces f es k -monótona para todo $1 \leq k \leq d$. Además, si f es completamente monótona, entonces es d -monótona para cualquier d .*

Demostración. Separemos los posibles casos:

- Si $k = d$ o $k = 1$, el resultado es trivial.
- Si $1 < k = d - 1$, $(-1)^{k-2} f^{(k-2)}$ es derivable una vez más, cumpliéndose que $(-1)^{k-1} f^{(k-1)} \geq 0$, es decir, que $(-1)^{k-2} f^{(k-2)}$ es no creciente. Además, como $k - 1 = d - 2$, $(-1)^{k-1} f^{(k-1)}$ es no creciente, se tiene que $(-1)^{k-2} f^{(k-1)}$ es no decreciente y por tanto $(-1)^{k-2} f^{(k-2)}$ es convexa.
- Si $1 < k \leq d - 2$, $(-1)^{k-1} f^{(k-1)} \geq 0$ y $(-1)^k f^{(k)} \geq 0$, de donde se deduce que $(-1)^{k-2} f^{(k-2)}$ es no decreciente y convexa.

□

El siguiente teorema, debido a Kimberling [41], proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que un generador *estricto* φ genere cópulas Arquimedianas **para todos los $n \geq 2$** .

Teorema 4.12. *Sea $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente y tal que $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(1) = 0$. Entonces, la función $C : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ definida por*

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \tag{4.47}$$

es una cópula n -dimensional para todo $n \geq 2$ si y sólo si φ^{-1} es completamente monótona en $[0, \infty)$.

Observación 4.4. El uso de generadores estrictos está justificado: cuando una función g es *completamente monótona* en $[0, \infty)$ y $g(c) = 0$, entonces g debe ser idénticamente nula en $[0, \infty)$ (por ser las funciones completamente monótonas analíticas [81] y aplicar el desarrollo de Taylor). Por tanto, si la pseudo-inversa $\varphi^{[-1]}$ de un generador Arquimediano φ es completamente monótona, será positiva en $[0, \infty)$, con lo cual φ es estricto y $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$. Entonces exigir generadores estrictos no es una gran restricción, pues surge de forma natural. ◁

En base a este teorema podemos dar una posible definición de n -cópula Arquimediana.

Definición 4.6. Sea una función $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$, continua, estrictamente decreciente, con $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1) = 0$ y con φ^{-1} completamente monótona. A la n -cópula definida por

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \tag{4.48}$$

se le denomina *n -cópula Arquimediana con generador φ* .

Corolario 4.4. Si la inversa φ^{-1} de un generador estricto φ de una cópula Arquimediana C es completamente monótona, entonces $\Pi \prec C$.

Demostración. Usamos el Corolario 4.1 para probar que $\Pi \prec C$. El generador de la cópula producto es $-\log(\cdot)$, con que tenemos que probar que $-\log(\varphi^{-1})$ es cóncava. Denotemos $g = \varphi^{-1}$. Como g es infinitamente derivable, que $-\log g$ sea cóncava equivale a que $[-\log g]'' = g''g - (g')^2 \geq 0$. Esta es una desigualdad que se cumple para las funciones completamente monótonas [81]. Por lo tanto, $\Pi \prec C$. ◻

El Teorema 4.12 admite una suavización de las condiciones: exigir que φ^{-1} sea n -monótona en $[0, \infty)$ en vez de completamente monótona. De ese modo, podremos generar d -cópulas para $d \leq n$. Pero con esta suavización se pierde la caracterización y sólo se tiene una condición suficiente.

Teorema 4.13. Sea $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty]$ una función continua, estrictamente decreciente y tal que $\varphi(1) = 0$. Entonces, la función $C : \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{I}$ definida por

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)) \tag{4.49}$$

es una cópula d -dimensional **para todo $d \leq n$ si $\varphi^{[-1]}$ es n -monótona** en $[0, \infty)$.

Observación 4.5. Este teorema generaliza las condiciones dadas por el Teorema 4.1 para n -cópulas. Cuando $\varphi^{[-1]}$ es 2-monótona, esto equivale a que $\varphi^{[-1]}$ sea convexa y no creciente, y esto implica que φ es convexa. Por lo tanto, se puede decir que el Teorema 4.12 es una extensión parcial (porque la condición es sólo suficiente de forma general) del Teorema 4.1. ◁

Cabe destacar que las condiciones requeridas a φ se pueden relajar si consideramos *quasi-cópulas*, pues en ese caso sólo hay que exigir que φ sea convexa para obtener *n-quasi-cópulas* [62].

En la práctica, comprobar si una determinada función es completamente monótona puede ser complicado. Por eso resulta útil contar con los resultados de la Proposición 4.5. La Proposición 4.5 y el Teorema de Bernstein están extraídos de [81].

Definición 4.7. Una función real f se dice *absolutamente monótona* en un intervalo $I \subset \overline{\mathbb{R}}$, si es continua y derivable en él para cualquier orden, satisfaciendo sus derivadas:

$$f^{(k)}(x) \geq 0, \quad \forall x \in I, k = 0, 1, \dots \quad (4.50)$$

Proposición 4.5. *Se cumplen:*

- I. *Si f es completamente monótona y g es absolutamente monótona, entonces la composición $f \circ g$ es completamente monótona.*
- II. *Si f y g son completamente monótonas, su suma y producto también lo son.*
- III. *Si f es completamente monótona y g es una función positiva con la derivada completamente monótona, entonces $f \circ g$ es completamente monótona, en particular, e^{-g} es completamente monótona.*

Por último, se prueba que los generadores cuya inversa es completamente monótona son en realidad las inversas de las transformadas de Laplace.

Teorema 4.14 (Teorema de Bernstein). *Una función ψ definida en $[0, \infty)$ es la transformada de Laplace de una función de distribución Λ si y sólo si ψ es completamente monótona y $\psi(0) = 1$.*

Corolario 4.5. *Los generadores estrictos que generan n -cópulas para cualquier $n \geq 2$ son las funciones ***inversas de las transformadas de Laplace***.*

Además, sólo hay que exigir que $\varphi = \psi^{-1}$, siendo ψ una transformada de Laplace. Así, como ψ es continua, estrictamente decreciente, cóncava y tal que $\psi(0) = 1$ y $\psi(\infty) = 0$, φ verificará que es continua, estrictamente decreciente y tal que $\varphi(1) = 0$ y $\varphi(\infty) = 0$.

Veamos algunos ejemplos de la aplicación de estos resultados. Podemos observar que las funciones φ^{-1} que aparecerán son transformadas de Laplace, algunas complicadas.

Ejemplo 4.6. Sea $\varphi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$ para $\theta > 0$, el generador que corresponde a la familia de Clayton *estricta*. $\varphi_\theta^{-1}(t) = (1 + \theta t)^{-\frac{1}{\theta}}$ es completamente monótona en $[0, \infty)$ pues para todo $t \in [0, \infty)$,

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) = (-1)^{2k} \prod_{j=0}^k (1 + \theta j) \cdot (1 + \theta t)^{-\frac{1+k\theta}{\theta}} \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \tag{4.51}$$

Otra forma de comprobar esto es considerar el generador $\bar{\varphi}_\theta(t) = t^{-\theta} - 1$, que difiere del anterior en la constante θ , pero que genera la misma cópula, en virtud de la Observación 4.1. De esta forma,

$$\bar{\varphi}_\theta^{-1}(t) = (1 + t)^{-\frac{1}{\theta}} = \mathcal{L} \left\{ e^{-t} \frac{t^{\frac{1}{\theta}-1}}{\Gamma(\frac{1}{\theta})} \right\} \tag{4.52}$$

y por el Corolario 4.5 podemos asegurar que $\bar{\varphi}_\theta^{-1}$ es completamente monótona. Entonces podemos generalizar la familia de Clayton de 2-cópulas a la familia de n -cópulas, para $\theta > 0$ y $n \geq 2$, dada por

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) := (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1)^{-\frac{1}{\theta}}. \tag{4.53}$$

◇

Ejemplo 4.7. Sea $\varphi_\theta(t) = -\log \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$, el generador de la familia de Frank. Aunque los generadores de esta familia son estrictos, como consecuencia del Corolario 4.4, debemos restringir los valores de θ a $(0, \infty)$, porque son los valores en los que $\Pi \prec C_\theta$. La inversa del generador es

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \log [1 - (1 - e^{-\theta}) e^{-t}]. \tag{4.54}$$

Usamos la propiedad II de la Proposición 4.5 para probar que es completamente monótona. Si probamos que $f(x) = \frac{-\log(1-x)}{\theta}$ es absolutamente monótona en $(0, 1)$ y que $g(t) = (1 - e^{-\theta}) e^{-t}$ es completamente monótona en $[0, \infty)$, $\varphi_\theta^{-1} = f \circ g$ será completamente monótona en $[0, \infty)$. f y g cumplen lo requerido:

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = \begin{cases} \frac{-\log(1-x)}{\theta}, & k = 0 \\ \frac{(k-1)!}{\theta} (1-x)^{-k}, & k > 0 \end{cases} \geq 0, \tag{4.55}$$

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) = (-1)^{2k} (1 - e^{-\theta}) e^{-t} \geq 0. \tag{4.56}$$

Entonces para $\theta > 0$ podemos generalizar la familia de Frank de 2-cópulas a la familia de

n -cópulas para todo $n \geq 2$ mediante

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) := -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1) \dots (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right). \tag{4.57}$$

◇

Ejemplo 4.8. Sea $\varphi_\theta = (-\log t)^\theta$, $\theta \geq 1$, el generador de la familia de Gumbel. Entonces $\varphi_\theta^{-1}(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right)$ es completamente monótona, en virtud de la propiedad III de la Proposición 4.5: e^{-x} es completamente monótona trivialmente y $t^{\frac{1}{\theta}}$ es una función positiva con una derivada completamente monótona. En efecto si g denota la derivada,

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) = (-1)^k \frac{\prod_{j=0}^k (1 - \theta j)}{\theta^{k+1}} t^{\frac{1-k}{\theta}} \geq 0. \tag{4.58}$$

Así que se puede generalizar la familia de Gumbel para 2-cópulas a una familia de n -cópulas, para cualquier $n \geq 2$ y $\theta \geq 1$ mediante

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) := \exp \left(- [(-\log u_1)^\theta + \dots + (-\log u_n)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right). \tag{4.59}$$

◇

Por lo que hemos visto, es relativamente sencillo generar n -cópulas Arquimedianas, pues lo que hay que hacer es seguir los métodos establecidos en los Teoremas 4.12, 4.13 y en el Corolario 4.5. Sin embargo, estas cópulas tienen sus limitaciones.

En primer lugar, las k -marginales de estas cópulas son idénticas, lo que las descarta para modelar situaciones de dependencia no simétricas. Por ejemplo, si tenemos tres variables X, Y y Z , con X e Y comonótonas e Y y Z contramonótonas, entonces las 2-marginales M y W no son iguales, con lo que no se puede describir satisfactoriamente el comportamiento de X, Y y Z mediante una 3-cópula Arquimediana. Por otro lado, la dependencia se va a medir únicamente a través de un parámetro, con lo cual los tipos de dependencia que capturen estas cópulas van a ser muy limitados.

Estos motivos hacen que las cópulas Arquimedianas tengan mayor interés práctico en el caso bidimensional, porque la dependencia puede ser capturada mediante un único parámetro. Para el caso multidimensional, aunque son fáciles de construir en comparación con el resto de cópulas multivariantes, presentan serias limitaciones debido a su rigidez. Para solventar estos problemas, se han desarrollado las *cópulas Arquimedianas anidadas*, que combinan 2-cópulas para conseguir distintas dependencias entre cada marginal y que están parametrizadas por más parámetros. Esta nueva dirección es muy interesante y ya

se dispone de métodos (2008) para la simulación de cópulas Arquimedianas de dimensión arbitraria [51, 35].

Capítulo 5

Simulación de cópulas

En este capítulo se presentan una serie de métodos para simular cópulas, centrándonos sobre todo en el caso bivalente. El interés de simular cópulas es doble: por un lado, sirve para ver gráficamente las propiedades de dependencia que posee una cópula, y, por otro, es una forma alternativa de generar variables aleatorias multidimensionales. Esto nos permite, en teoría, simular cualquier distribución multidimensional a partir de la simulación de una cópula. Para simular (x_1, \dots, x_n) de una distribución multivariante F con marginales $F_i, i = 1, \dots, n$ y cópula C , generamos (u_1, \dots, u_n) según C e invertimos cada u_i usando las distribuciones marginales, $x_i = F_i^{-1}(u_i), i = 1, \dots, n$. El procedimiento se simplifica mucho cuando lo que queremos es simular la distribución F asociada a una cópula C que es Arquimediana.

A lo largo del capítulo se incluyen ejemplos de simulación de cópulas, cuyos códigos se recogen en el Apéndice B.

5.1. Método condicional

Como simular una cópula C es simular un vector aleatorio formado por uniformes, se pueden aplicar las técnicas clásicas de simulación multivariante [37, 14]: el método condicional, el método de la transformación y el método de aceptación-rechazo. De ellos, sólo el primero se puede aplicar de forma general, ya que no depende de la distribución a considerar. Por eso será el que utilicemos para simular cópulas (en la Sección 5.4 veremos algunos ejemplos de aplicación del método de la transformación). Para este método, necesitamos las distribuciones condicionales de C . En el caso bidimensional, para (U, V) la distribución condicional de V dado $U = u$ es

$$\begin{aligned} C_u(v) &= \mathbb{P}\{V \leq v \mid U = u\} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\{V \leq v \mid u \leq U < u + \Delta u\}}{\mathbb{P}\{u \leq U < u + \Delta u\}} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observemos que, debido al Corolario 1.4, la función $v \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$, que se denotará por $C_u(v)$, existe y es no decreciente en casi todo \mathbb{I} . El siguiente algoritmo permite simular 2-cópulas con el método condicional y el de inversión:

Algoritmo 5.1. *Sea C una 2-cópula.*

- I. *Se generan $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.*
- II. *$V = C_u^{(-1)}(T)$, con $C_u^{(-1)}(v) = \left(\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\right)^{(-1)}$ la quasi-inversa de C_u .*
- III. *Entonces $(U, V) \sim C$.*

Ejemplo 5.1. Vamos a generar 500 puntos de la cópula $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$ del Ejemplo 1.8. Esta cópula es de la familia de Ali-Mikhail-Haq, con $\theta = 1$, y nos permite simular la distribución H de ese mismo ejemplo. Para ello, hay que calcular C_u y $C_u^{(-1)}$:

$$C_u(v) = \left(\frac{v}{u+v-uv}\right)^2, \quad C_u^{(-1)}(t) = \frac{u\sqrt{t}}{1-(1-u)\sqrt{t}}. \tag{5.2}$$

Las quasi-inversas de las marginales de H eran $F^{(-1)}(u) = 2u-1$ y $G^{(-1)}(v) = -\log(1-v)$. Entonces para generar observaciones de C y H procedemos:

- I. Obtener dos observaciones uniformes u y t .
- II. Calcular $v = \frac{u\sqrt{t}}{1-(1-u)\sqrt{t}}$.
- III. (u, v) es una muestra de C y $(2u-1, -\log(1-v))$ de H .

En la Figura 5.1 se pueden ver los 500 puntos generados para C y H . Podemos usar la propiedad de C en la que los puntos cercanos a cero están positivamente correlados para construir otras distribuciones con esa propiedad. Por ejemplo, tomando F y G como normales, la nube de puntos tendría la forma de una elipse “atraída” por el $(0, 0)$. \diamond

Ejemplo 5.2. En este ejemplo simulamos una cópula con componente singular. Sea $C_\theta(u, v) = \max(\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0)$, con $\theta \in (0, 1)$. Su distribución condicionada a u es

$$C_u(v) = \begin{cases} \theta v - \theta + 1, & \theta uv + (1-\theta)(u+v-1) > 0 \\ 0, & \theta uv + (1-\theta)(u+v-1) \leq 0 \end{cases}. \tag{5.3}$$

La única novedad que aparece con la componente singular es que hay que considerar la quasi-inversa, en vez de la inversa. Usando que $\theta uv + (1-\theta)(u+v-1) > 0$ equivale a $v > (1-\theta)\frac{1-u}{1-\theta+\theta u}$, tenemos

$$C_u^{(-1)}(t) = \begin{cases} \frac{t+\theta-1}{\theta}, & t > C_u\left((1-\theta)\frac{1-u}{1-\theta+\theta u}\right) = \frac{1-\theta}{1-\theta+\theta u} \\ (1-\theta)\frac{1-u}{1-\theta+\theta u}, & t \leq \frac{1-\theta}{1-\theta+\theta u} \end{cases}. \tag{5.4}$$

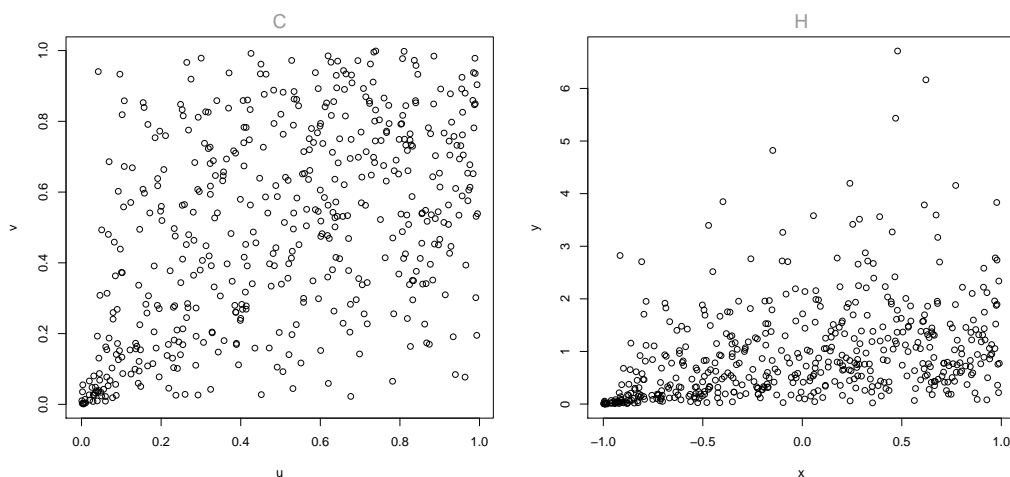


Figura 5.1: Simulaciones para $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$ y H .

Para simular C aplicamos el Algoritmo 5.1. En la Figura 5.2 se pueden ver dos simulaciones en las que se aprecia perfectamente la componente singular, definida por la curva $\theta uv + (1 - \theta)(u + v - 1) = 0$. ◇

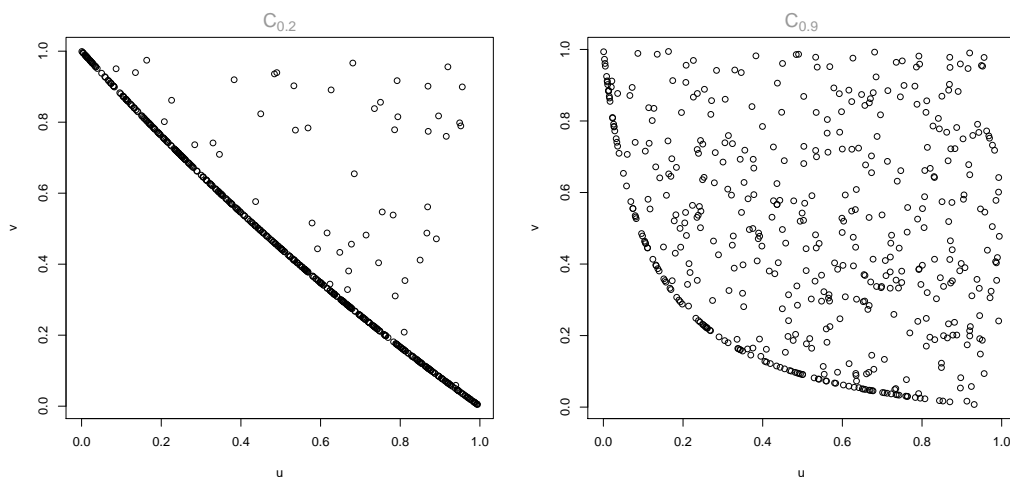


Figura 5.2: 500 puntos de la cópula $C_\theta(u, v) = \max(\theta uv + (1 - \theta)(u + v - 1), 0)$ con $\theta = 0.2$ y $\theta = 0.9$.

Para el caso multivariante, se introduce la siguiente notación para denotar las k -marginales de C :

$$C_i(u_1, \dots, u_i) = C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1), \quad i = 2, 3, \dots, n - 1 \tag{5.5}$$

Para (U_1, \dots, U_n) , la distribución condicional de U_k dados $U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}$

está dada por

$$\begin{aligned}
 C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= \mathbb{P}\{U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}\} \\
 &= \frac{\frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}}}{\frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}}}, \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

bajo la condición de que el numerador y denominador de (5.6) existan y que el denominador no se anule, lo cual es cierto si C es **absolutamente continua**, el caso más habitual. En el caso en que podamos calcular estas distribuciones condicionales, tenemos el siguiente algoritmo, extensión multidimensional del anterior.

Algoritmo 5.2. *Sea C una n -cópula.*

- I. *Simular $u_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$.*
- II. *Simular $v_k \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y calcular $u_k \sim C_k^{(-1)}(v_k | u_1, \dots, u_{k-1})$ para $k = 2, \dots, n$.*
- III. *(u_1, \dots, u_n) es una observación de C .*

El método condicional es efectivo cuando se pueden calcular analíticamente las inversas de las distribuciones C_k . En otro caso, hay que usar un procedimiento numérico para *invertir* C_k , lo que puede ser computacionalmente muy costoso. En cualquier caso, necesitamos disponer de las expresiones de C_k , lo que también puede presentar problemas e impedir la implementación del método.

Estos problemas se simplifican si trabajamos con cópulas Arquimedianas, porque para ellas se verifica el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Sea C una n -cópula Arquimediana con generador φ , definida según la Definición 4.6. Entonces, para $k = 2, \dots, n$*

$$C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k))}{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_{k-1}))}. \tag{5.7}$$

Demostración. Como por definición $\varphi(1) = 0$, entonces, para $k = 2, \dots, n - 1$,

$$C_k(u_1, \dots, u_k) = C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k)). \tag{5.8}$$

Como φ^{-1} es completamente monótona, existen sus derivadas de cualquier orden y por tanto podemos calcular el numerador y denominador de (5.6) sin problemas. Así,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_k} &= \frac{\partial^{k-1} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k))}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \\
 &= \varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k)) \prod_{j=1}^{k-1} \varphi^{(1)}(u_j) \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} &= \frac{\partial^{k-1} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_{k-1}))}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \\ &= \varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_{k-1})) \prod_{j=1}^{k-1} \varphi^{(1)}(u_j). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Del cociente entre (5.9) y (5.10) se obtiene (5.7). □

A continuación se ven dos ejemplos de la aplicación del teorema anterior, para generar las cópulas de las familias de Clayton y Frank.

Ejemplo 5.3. En el Ejemplo 4.6 vimos en profundidad a la familia Clayton, en especial su parte estricta. Esta familia se puede simular de una forma sencilla. Recordemos que una n -cópula de la familia de Clayton estaba dada por

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad (5.11)$$

con $\theta > 0$. Ahora consideramos el generador $\varphi_\theta(t) = t^{-\theta} - 1$, que resulta más sencillo. Su inversa es $\varphi_\theta^{-1}(t) = (1 + t)^{-\frac{1}{\theta}}$ y su derivada k -ésima,

$$\varphi_\theta^{-1(k)} = (-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 + \theta j}{\theta} (1 + t)^{-\frac{1}{\theta} - k}, \quad k \geq 1. \quad (5.12)$$

Entonces, sustituyendo en (5.7), para $k \geq 2$

$$\begin{aligned} C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= \frac{\varphi_\theta^{-1(k-1)}(\varphi_\theta(u_1) + \cdots + \varphi_\theta(u_{k-1}))}{\varphi_\theta^{-1(k-1)}(\varphi_\theta(u_1) + \cdots + \varphi_\theta(u_{k-1}))} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^k u_i^{-\theta} - k + 1}{\sum_{i=1}^{k-1} u_i^{-\theta} - k + 2} \right)^{-\frac{1}{\theta} - k - 1}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si $v_k = C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1})$, podemos despejar u_k , resultando:

$$u_k = \left[\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i^{-\theta} - k + 2 \right) \left(v_k^{\frac{\theta}{\theta(1-k)-1}} - 1 \right) + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad k \geq 2. \quad (5.14)$$

Con esto ya podemos simular una cópula de Clayton de cualquier dimensión n siguiendo el Algoritmo 5.2 y la relación (5.14). Por ejemplo, para $n = 3$ se procede:

- Generar $v_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $u_1 = v_1$.

- Generar $v_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $u_2 = \left(u_1^{-\theta} \left(v_2^{-\frac{\theta}{\theta-1}} - 1 \right) + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}$.
- Generar $v_3 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $u_3 = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \left(v_3^{-\frac{\theta}{-2\theta+1}} - 1 \right) + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}$.

La Figura 5.3 muestra 500 puntos simulados con el algoritmo para $n = 2$ y $n = 3$. También podemos usar marginales normales $\mathcal{N}(0, 1)$ para simular las distribuciones $C_\theta(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$ y $C_\theta(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(u_3))$. La normalidad acentúa la dependencia al concentrarse la probabilidad cerca de la media. ◇

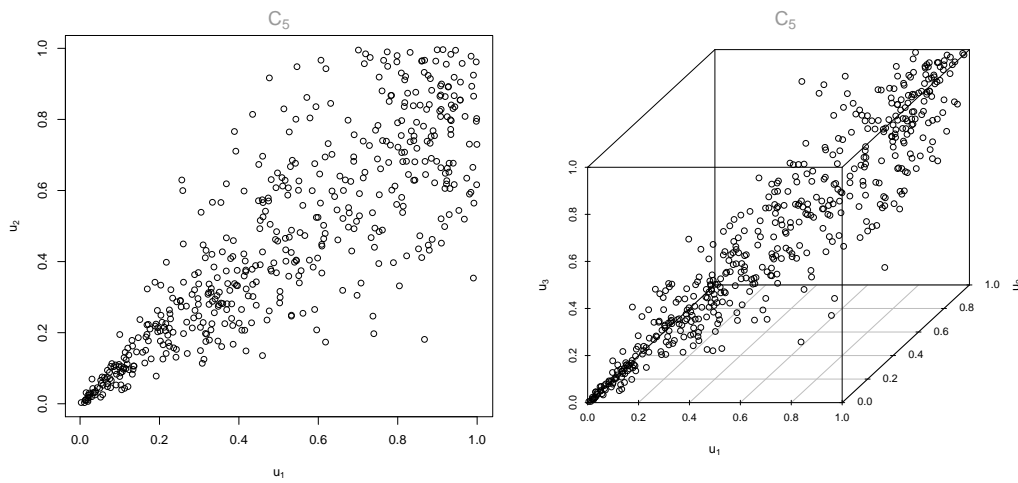


Figura 5.3: Simulaciones para la cópula de Clayton con $\theta = 5$ en $n = 2$ y $n = 3$.

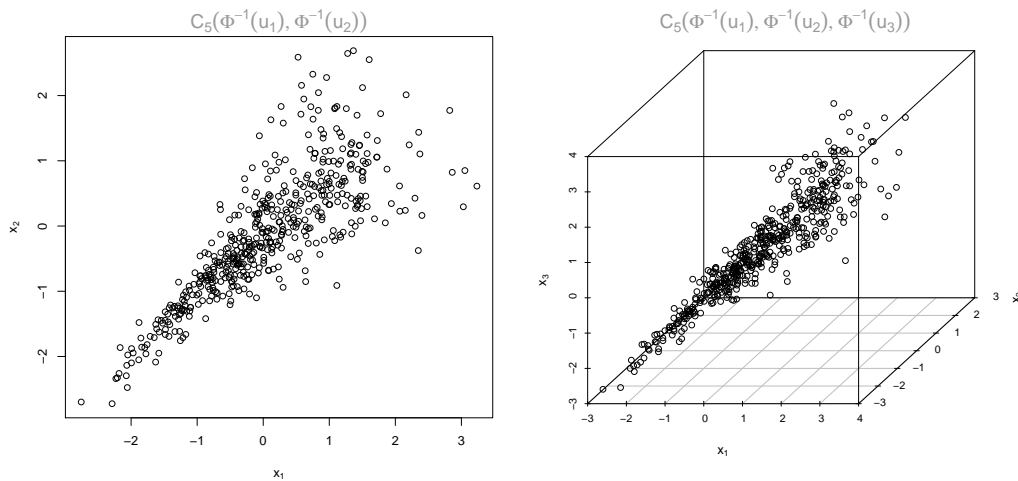


Figura 5.4: Simulación para las cópulas de Clayton con $\theta = 5$ y marginales normales para $n = 2$ y $n = 3$.

Ejemplo 5.4. La familia de Frank, vista en el Ejemplo 4.7, estaba dada por las cópulas

$$F_\theta(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right). \tag{5.15}$$

Esta familia no es tan sencilla de simular como la de Clayton, debido a que las derivadas de $\varphi_\theta^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \log [1 - (1 - e^{-\theta}) e^{-t}]$ se complican sucesivamente. Por eso sólo la simularemos para $n = 2$ y $n = 3$. Si denotamos $w = \frac{e^t(e^{-\theta}-1)}{1+e^t(e^{-\theta}-1)}$, las dos primeras derivadas de φ_θ^{-1} son

$$\varphi_\theta^{-1(1)}(t) = -\frac{1}{\theta} w \quad y \quad \varphi_\theta^{-1(2)}(t) = -\frac{1}{\theta} w(w - 1). \tag{5.16}$$

El procedimiento para simular observaciones de esta cópula hasta $n = 3$ es el siguiente:

- Simular $v_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ y tomar $u_1 = v_1$.
- Simular $v_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Para calcular u_2 , hay que despejar en

$$\begin{aligned} v_2 = F_2(u_2 | u_1) &= \frac{\varphi_\theta^{-1(1)}(\varphi_\theta(u_1) + \varphi_\theta(u_2))}{\varphi_\theta^{-1(1)}(\varphi_\theta(u_1))} \\ &= e^{-\theta u_1} \frac{e^{-\theta u_2} - 1}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Y resulta

$$u_2 = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{v_2(1 - e^{-\theta})}{v_2(e^{-\theta u_1} - 1) - e^{\theta u_1}} \right). \tag{5.18}$$

- Simular $v_3 \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Para calcular u_3 , hay que despejar en

$$\begin{aligned} v_3 = F_2(u_3 | u_1, u_2) &= \frac{\varphi_\theta^{-1(2)}(\varphi_\theta(u_1) + \varphi_\theta(u_2) + \varphi_\theta(u_3))}{\varphi_\theta^{-1(2)}(\varphi_\theta(u_1) + \varphi_\theta(u_2))} \\ &= \frac{(e^{-\theta} - 1) [(e^{-\theta u_1} - 1) + (e^{-\theta u_2} - 1)]^2 (e^{-\theta u_3} - 1)}{[(e^{-\theta} - 1)^2 + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)(e^{-\theta u_3} - 1)]^2}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Despejar u_3 ahora es más complicado. Denotaremos $x = e^{-\theta u_3} - 1$, $a = (e^{-\theta} - 1) [(e^{-\theta u_1} - 1) + (e^{-\theta u_2} - 1)]^2$, $b = (e^{-\theta} - 1)^2$ y $c = (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)$ para que (5.19) se transforme en el polinomio de segundo grado

$$v_3 = a \frac{x}{[b + cx]^2} \Leftrightarrow [c^2 v_3] x^2 + [2bcv_3 - a] x + [b^2 v_3] = 0. \tag{5.20}$$

Si denotamos por $A = c^2 v_3$, $B = 2bcv_3 - a$ y $C = b^2 v_3$, la solución válida de (5.20)

es $x^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, con lo que

$$u_3 = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right). \tag{5.21}$$

Con el código del Apéndice B se simularon 500 puntos para $\theta = 5$, que se pueden ver en la Figura 5.5. ◊

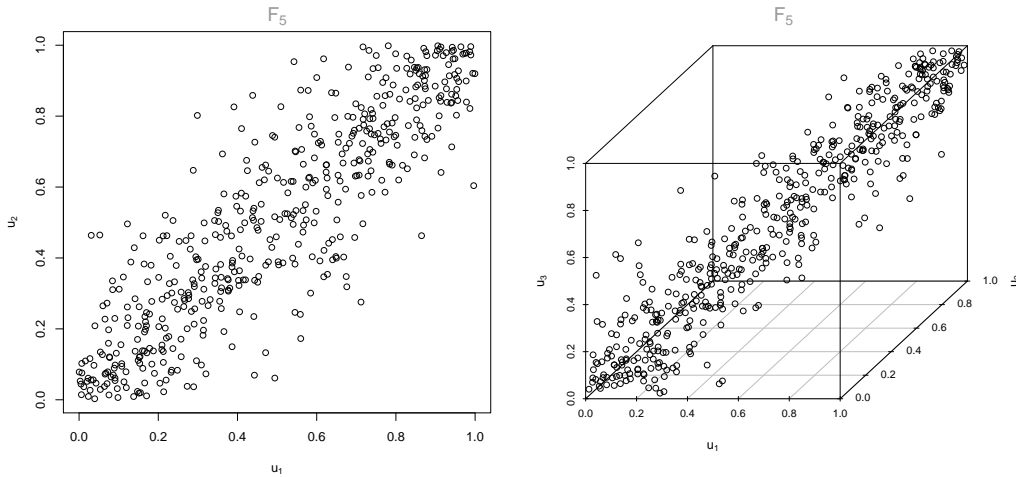


Figura 5.5: Simulaciones para la cópula de Frank con $\theta = 5$ en $n = 2$ y $n = 3$.

5.2. Simulación de cópulas Arquimedianas

La estructura de las cópulas Arquimedianas permite obtener algoritmos de simulación específicos para 2-cópulas. El siguiente está basado en el Teorema 4.6, que reanunciamos a continuación.

Teorema 5.2. *Sea (U, V) un vector aleatorio de una cópula Arquimediana C , con generador $\varphi \in \Omega$. Sean $W = \frac{\varphi(U)}{\varphi(U) + \varphi(V)}$ y $Z = C(U, V)$. Entonces:*

- I. W tiene distribución uniforme en $(0, 1)$.
- II. Z tiene por distribución a

$$K_C(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}. \tag{5.22}$$

En otras palabras, $K_C(t)$ es el C -volumen del todos los conjuntos de nivel por debajo de t :

$$K_C(t) = V_C(\{(u, v) \in \mathbb{I} : C(u, v) \leq t\}). \tag{5.23}$$

III. Z y W son independientes.

Lo que hacemos es simular las variables (Z, W) y obtener $(U, V) \sim C$ a partir de la transformación

$$h : \begin{cases} U = \varphi^{-1}(W\varphi(Z)) \\ V = \varphi^{-1}((1 - W)\varphi(Z)) \end{cases} . \tag{5.24}$$

Como Z y W son independientes y W es uniforme, la única dificultad es la simulación de Z que sigue una distribución K_C . Se puede usar, por ejemplo, el método de inversión.

Algoritmo 5.3. Sea C una cópula Arquimediana con generador φ .

- I. Se generan $W, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
- II. Se calcula $Z = K_C^{(-1)}(T)$ y así $Z \sim K_C$.
- III. $U = \varphi^{-1}(W\varphi(Z))$ y $V = \varphi^{-1}((1 - W)\varphi(Z))$.
- IV. Entonces $(U, V) \sim C$.

A este método se le suele llamar *método K*, por la aparición de la distribución K_C .

Ejemplo 5.5. Las cópulas de Gumbel tienen de generador a $\varphi_\theta(t) = (-\log t)^\theta$. Su inversa es $\varphi_\theta^{-1}(u) = \exp(-u^{\frac{1}{\theta}})$ y la derivada $\varphi'_\theta(t) = -(-\log t)^{\theta-1} \frac{1}{t}$. Entonces

$$K_C(z) = z - \frac{\varphi_\theta(z)}{\varphi'_\theta(z)} = z + \frac{z}{\theta}(-\log z) = z \left(\frac{\theta - \log z}{\theta} \right). \tag{5.25}$$

El problema es que K_C no es invertible analíticamente, por lo que hay que obtener $Z = K_C^{(-1)}(T)$ numéricamente. Este es el principal problema de este algoritmo, pues el tercer paso es sencillo. En el Apéndice B se puede ver en detalle el cálculo de (U, V) . En la Figura 5.6 se puede ver la estructura de dependencia de la familia Gumbel: una dependencia positiva acentuada en los extremos. ◇

Otro algoritmo se debe a Genest y MacKay [28] y está basado en que $\varphi(C) = \varphi(U) + \varphi(V)$ implica que

$$\varphi'(C) \frac{\partial C}{\partial u} = \varphi'(u). \tag{5.26}$$

La variable auxiliar $S = C(U, V)$ se puede calcular como

$$S = (\varphi')^{[-1]}(\varphi'(C)) = (\varphi')^{[-1]} \left(\frac{\varphi'(U)}{\frac{\partial C}{\partial u}} \right) \stackrel{d}{=} (\varphi')^{[-1]} \left(\frac{\varphi'(U)}{Z} \right) \tag{5.27}$$

siendo $Z \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Una vez que podemos simular S y que U se ha generado como una uniforme, obtener V es sencillo puesto que sólo hay que despejarla en $\varphi(S) = \varphi(U) + \varphi(V)$.

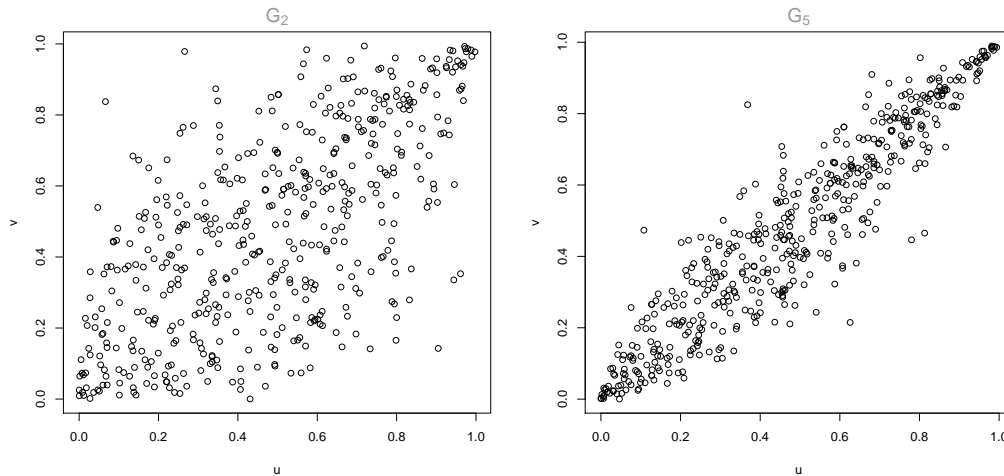


Figura 5.6: Simulaciones para la 2-cópula de Gumbel con $\theta = 2$ y $\theta = 5$.

Algoritmo 5.4. Sea C una cópula Arquimediana con generador φ .

- I. Se generan $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
- II. $S = (\varphi')^{[-1]} \left(\frac{\varphi'(U)}{T} \right)$.
- III. $V = \varphi^{[-1]} (\varphi(S) - \varphi(U))$.
- IV. Entonces $(U, V) \sim C$.

El problema que presenta este método es el cálculo de $(\varphi')^{[-1]}$, ya que a veces puede ser imposible dar una expresión cerrada de ella.

Ejemplo 5.6. La cópula $C_\theta(u, v) = \max \left(1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, 0 \right)$, con $\theta \geq 1$, tiene componente singular al no ser $\varphi_\theta(t) = (1 - t)^\theta$ estricto. Para aplicar el algoritmo anterior necesitamos calcular la derivada $\varphi'_\theta(t) = -\theta(1 - t)^{\theta-1}$ y las inversas del generador y de la derivada del generador:

$$\varphi_\theta^{[-1]}(u) = \begin{cases} 1 - u^{\frac{1}{\theta}}, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & u \geq 0 \end{cases}, \tag{5.28}$$

$$(\varphi'_\theta)^{[-1]}(u) = \begin{cases} 1 - \left(-\frac{u}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}, & 0 \geq u \geq -\theta \\ 0, & u \leq -\theta \end{cases}. \tag{5.29}$$

Con el código correspondiente podemos implementar el algoritmo y simular esta cópula para $\theta = 7$. También podemos ver que la transformación de las marginales en normales hace invertir la curvatura de la componente singular. ◇

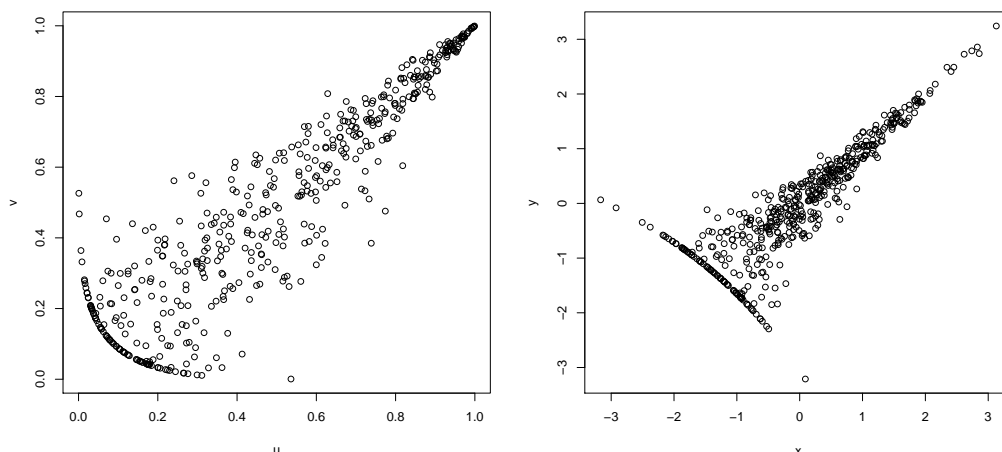


Figura 5.7: Simulaciones $C_\theta(u, v) = \max\left(1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right)$ con $\theta = 7$.

5.3. Método de Marshall y Olkin

En el Ejemplo 3.8 y, posteriormente, en el Teorema 4.14 vimos que las funciones de la forma

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi\left(\phi^{-1}(u_1) + \dots + \phi^{-1}(u_n)\right) \tag{5.30}$$

eran cópulas, con ϕ la transformada de Laplace de una distribución Λ . El siguiente algoritmo para la generación de observaciones de cópulas del tipo (5.30) se debe a Marshall y Olkin [50].

Algoritmo 5.5. *Sea C una n -cópula Arquimediana con generador $\varphi = \phi^{-1}$, con ϕ la transformada de Laplace de una variable aleatoria γ .*

- I. *Generar la variable aleatoria γ con transformada de Laplace ϕ .*
- II. *Generar $V_1, \dots, V_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$.*
- III. *Calcular $U_k = \phi\left(-\frac{1}{\gamma} \log V_k\right)$, para $k = 1, \dots, n$.*
- IV. *Entonces $(U_1, \dots, U_n) \sim C$.*

Este algoritmo funciona muy bien para el tipo de cópulas con transformadas de Laplace correspondientes a distribuciones sencillas. La parte más complicada es la generación de la variable aleatoria γ cuya transformada de Laplace es ϕ , aunque normalmente no es problemático. La gran ventaja es que, una vez simulada γ , se pueden simular observaciones con tantas componentes como se desee sin que el proceso se complique. Esto no ocurría en el método condicional en el que, salvo excepciones como el caso de la familia

Clayton, lo normal es que la distribución condicional se vaya complicando impidiendo la simulación en altas dimensiones. Los métodos específicos para 2-cópulas Arquimedianas tampoco pueden ser extendidos a dimensiones superiores.

Ejemplo 5.7. Las n -cópulas de la familia Clayton tienen un generador con inversa $(1+t)^{-\frac{1}{\theta}}$, que de acuerdo a (4.52), corresponde a la transformada de Laplace de la distribución $\Gamma(1, \frac{1}{\theta})^1$. Otra forma de ver esto es recordando que, para una distribución Λ con soporte positivo y función característica φ_Λ , $\mathcal{L}\{\Lambda\}(t) = \varphi_\Lambda(it)$ y que $\varphi_{\Gamma(a,p)}(t) = (1 - \frac{it}{a})^{-p}$.

El algoritmo para simular una cópula Clayton multidimensional es:

- Simular $\gamma \sim \Gamma(1, \frac{1}{\theta})$.
- Simular $V_1, \dots, V_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
- Calcular $U_k = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \log V_k\right)^{-\frac{1}{\theta}}$, para $k = 1, \dots, n$.

◇

Ejemplo 5.8. Un ejemplo en el que el método condicional no funciona bien es en la familia de Gumbel, vista en el Ejemplo 4.8. Su generador era $\varphi_\theta(t) = (-\log t)^\theta$, con $\theta \geq 1$. Entonces la transformada de Laplace que usaremos es $\mathcal{L}\{\gamma\}(s) = \varphi_\theta^{-1}(s) = \exp\left(-s^{\frac{1}{\theta}}\right)$. La variable γ pertenece a la clase de *variables aleatorias estables*. Dichas variables tienen una función característica de una de las dos formas siguientes:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta(\tan \frac{\pi\alpha}{2})(\text{sign } u)(|\gamma u|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 - i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign } u \log(\gamma |u|)] + i\delta), & \alpha = 1 \end{cases}, \quad (5.31)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta(\tan \frac{\pi\alpha}{2})(\text{sign } u)] + i\delta), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 - i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign } u \log |u|] + i\delta), & \alpha = 1 \end{cases}. \quad (5.32)$$

A la primera forma se las conoce como distribuciones $St(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ y a las segundas por $St(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$. Hay varias parametrizaciones de esta familia de variables aleatorias. Ésta es la usada por Nolan [63].

La variable que corresponde a la transformación $\exp\left(-s^{\frac{1}{\theta}}\right)$ es $St\left(\frac{1}{\theta}, 1, (\cos\left(\frac{\pi}{2\theta}\right))^\theta, 0; 1\right) \equiv PS(\alpha, 1)$, se conoce como *estable positiva* y se puede simular mediante el algoritmo de Chambers [7], implementado en el paquete `fBasics`. Si se quiere implementar manualmente, una forma clara de hacerlo es seguir a [78]:

- Simular $\eta \sim \mathcal{U}(0, \pi)$.
- Simular $w \sim \text{Exp}(1)$.

¹ $\Gamma(a, p) \sim \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}$.

- Fijar $\alpha = \frac{1}{\theta}$ y calcular $z = \frac{\sin((1-\alpha)\eta)(\sin(\alpha\eta))^{1-\alpha}}{\sin(\eta)^{1-\alpha}}$.
- Calcular $\gamma = \left(\frac{z}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, que tiene distribución $PS(\alpha, 1)$.

La Figura 5.8 manifiesta la dependencia de las colas superiores en la familia de Gumbel y uno de los problemas de las cópulas Arquimedianas n -dimensionales: que tienen las marginales iguales. ◊

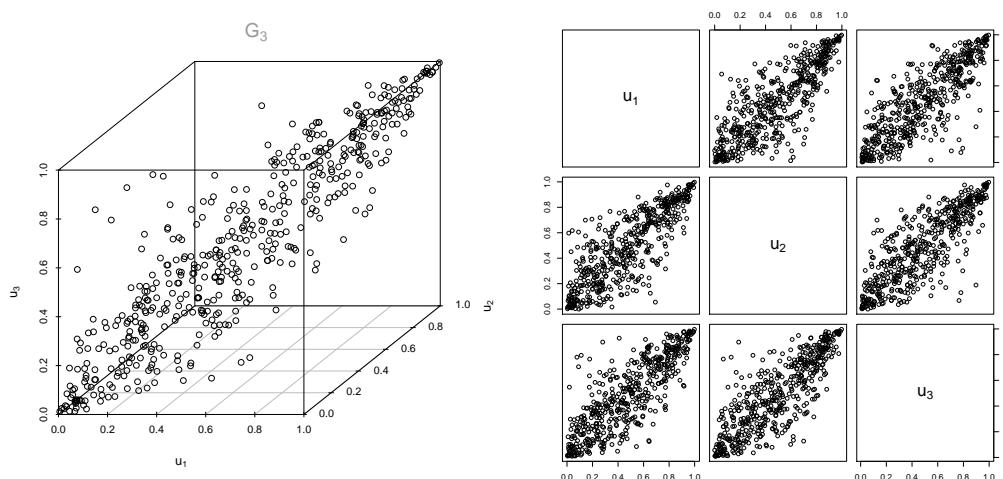


Figura 5.8: Simulaciones para las cópulas de Gumbel con $\theta = 3$ en $n = 2$ y $n = 3$.

Hasta ahora hemos aplicado el Algoritmo 5.5 localizando primero una cópula que queríamos simular y obteniendo luego la variable γ necesaria. Otra opción muy interesante es proceder al revés: buscar variables γ positivas con transformadas ϕ para ver las cópulas que se pueden generar. Así se pueden descubrir nuevos modelos de dependencia. Los próximos ejemplos ilustran esta alternativa.

Ejemplo 5.9. Consideremos una variable X con distribución geométrica, es decir

$$\mathbb{P}\{X = x\} = (1 - p)^{x-1}p \quad \text{con } 0 < p \leq 1 \text{ y } x = 1, 2, 3, \dots \tag{5.33}$$

Su función característica es $\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$, con lo que su transformada de Laplace es $\phi(t) = \frac{pe^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}$. Consideremos el cambio de variable $\theta = 1 - p$, con $\theta \in [0, 1)$. Con este cambio, la transformada de Laplace es

$$\phi(t) = \frac{(1 - \theta)e^{-t}}{1 - \theta e^{-t}} = \frac{1 - \theta}{e^t - \theta}. \tag{5.34}$$

Su inversa es el generador de la cópula de Ali-Mikhail-Haq, con $\theta \in [0, 1)$. Entonces esta cópula está inducida por una variable geométrica. No hay que preocuparse porque

el parámetro sólo permita la simulación de la dependencia positiva, si cambiamos U_k por $1 - U_k$ tendremos dependencia negativa.

La n -cópula de Ali-Mikhail-Haq viene dada por

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) = \phi \left(\sum_{i=1}^n \log \frac{1 - \theta(1 - u_i)}{u_i} \right) = \phi \left(\log \prod_{i=1}^n \frac{1 - \theta(1 - u_i)}{u_i} \right) \tag{5.35}$$

$$= \frac{1 - \theta}{\prod_{i=1}^n \frac{1 - \theta(1 - u_i)}{u_i} - \theta}. \tag{5.36}$$

◇

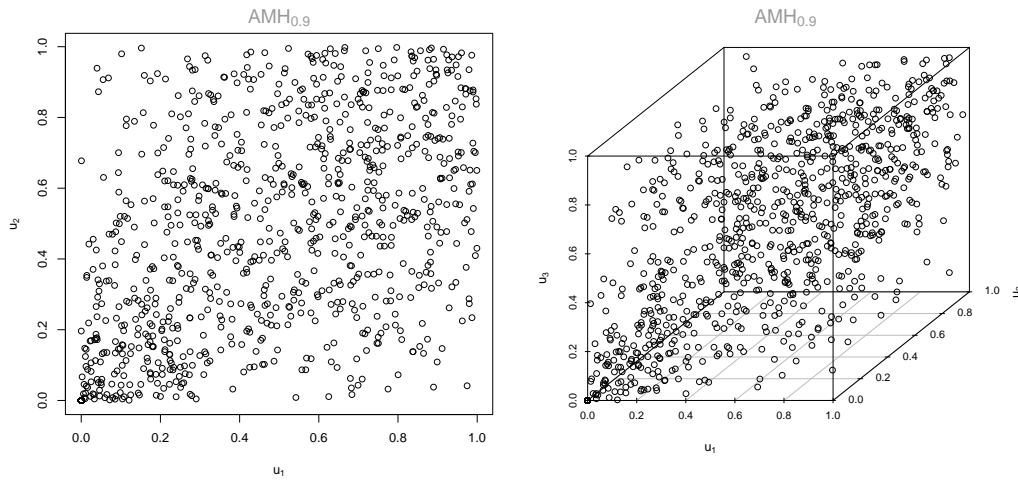


Figura 5.9: Simulaciones para las cópulas de Ali-Mikhail-Haq con $\theta = 0.9$ en $n = 2$ y $n = 3$.

5.4. Algunos algoritmos particulares

En esta sección se tratan los algoritmos más importantes para la simulación de cópulas particulares. La mayoría de estos algoritmos surgen de la aplicación del método de la transformación [37], consistente en transformar, mediante una aplicación adecuada, variables uniformes e independientes para obtener la distribución deseada.

Las dos primeras cópulas corresponden a las cópulas elípticas y sus algoritmos se pueden ver en [19, 67].

5.4.1. Cópula Gaussiana

La cópula Gaussiana es una de las cópulas más usadas y más fáciles de simular en una dimensión arbitraria n . El algoritmo para simularla se basa en el conocido resultado:

Teorema 5.3. Si $X \sim \mathcal{N}_k(\mu, \Sigma)$ y C es una matriz $k \times p$ con $p \leq k$ y rango p , entonces $CX \sim \mathcal{N}_p(C\mu, C\Sigma C^T)$.

Usaremos la descomposición de Cholesky de una matriz definida positiva R (la matriz de correlaciones), es decir la única matriz A triangular inferior tal que $R = AA^T$.

Algoritmo 5.6. Sea C_R^{Ga} la n -cópula Gaussiana con matriz de correlación R .

- I. Hallar la descomposición de Cholesky A de R .
- II. Simular n variables independientes $Z_1, \dots, Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- III. Si $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$, calcular $X = AZ$.²
- IV. Obtener $U_i = \Phi(X_i)$, $i = 1, \dots, n$.
- V. $(U_1, \dots, U_n) \sim C_R^{Ga}$.

Si se quiere, la simulación de las normales univariantes se puede hacer mediante el método de Box–Muller [37]:

$$U, V \sim \mathcal{U}(0, 1) \text{ independientes} \Rightarrow (-2 \log U)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi V) \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.37)$$

Ejemplo 5.10. Sea $R = \begin{pmatrix} 1 & -0.85 & 0.7 \\ -0.85 & 1 & -0.5 \\ 0.7 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz de correlaciones. En la siguientes gráficas se muestran 500 puntos simulados para la cópula $C_R^{Ga}(u_1, u_2, u_3)$ y para la distribución trivariante con marginales normales (una normal tridimensional). \diamond

5.4.2. Cópula t de Student

Para simular observaciones de la cópula t de Student con ν grados de libertad y matriz de correlación R , usamos la representación (2.27).

Algoritmo 5.7. Sea $C_{R,\nu}^t$ la n -cópula t de Student con ν grados de libertad y matriz de correlación R .

- I. Hallar la descomposición de Cholesky A de R .
- II. Simular n variables independientes $Z_1, \dots, Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- III. Simular una variable $S \sim \chi_\nu^2$, independiente de las anteriores.
- IV. Si $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$, calcular $Y = AZ$.

²Llegados a este paso, $X \sim \mathcal{N}(0, R)$. Sólo falta hacer las marginales uniformes.

- v. Calcular $X = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Y$.
- vi. Obtener $U_i = T_\nu(X_i), i = 1, \dots, n$.
- vii. $(U_1, \dots, U_n) \sim C_{R,\nu}^t$.

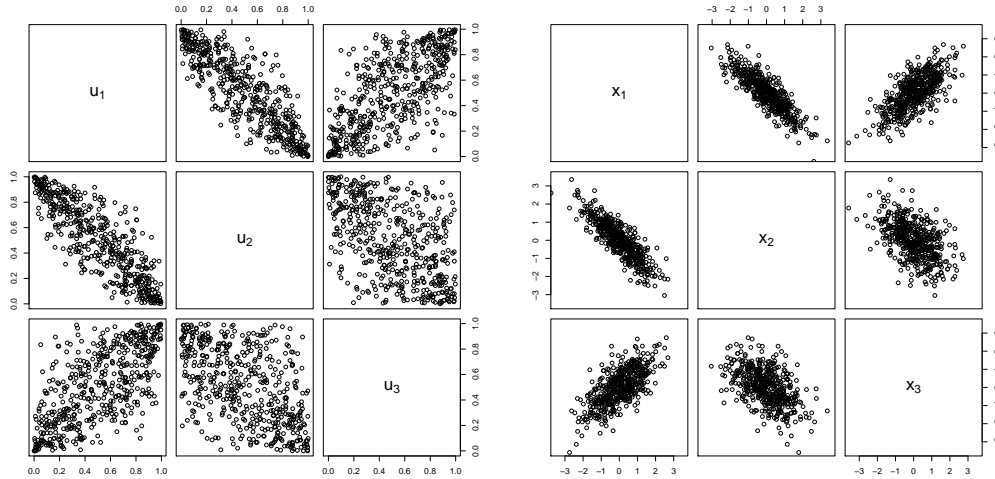


Figura 5.10: Simulación de la cópula Gaussiana con $n = 3$.

Ejemplo 5.11. Con la misma semilla que utilizamos en el anterior ejemplo, podemos simular 500 puntos para $C_{2,R}^t(u_1, u_2, u_3)$ y la distribución trivariante de marginales normales y ver la diferencia entre la cópula Gaussiana y la t de Student. Aunque los gráficos son bastante parecidos, con la t de Student hay una mayor dependencia en las colas. \diamond

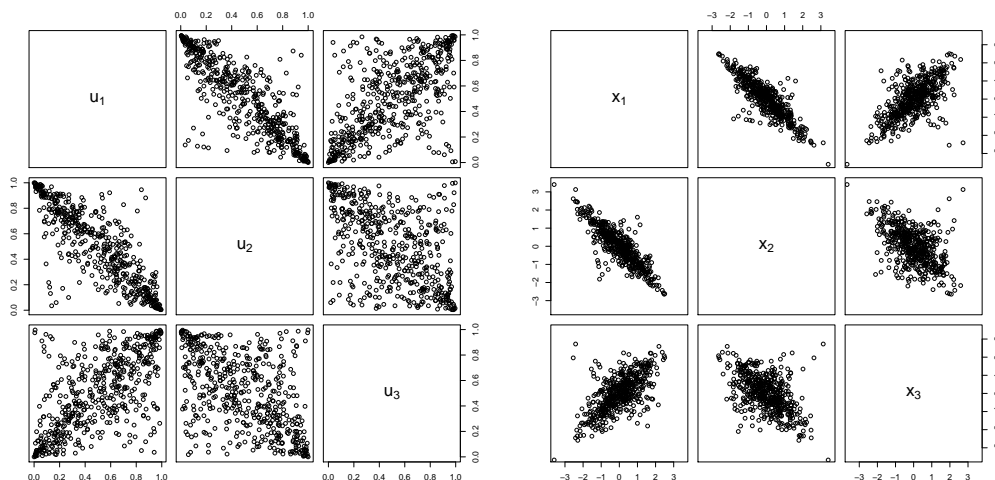


Figura 5.11: Simulación de la cópula t de Student con $n = 3$.

5.4.3. Cópula de Farlie–Gumbel–Morgenstern

Vimos en el Ejemplo 3.7 que las cópulas de la familia FGM tenían la forma

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1]. \tag{5.38}$$

Johnson [37] proporciona un algoritmo para su simulación, y, además se muestra escéptico sobre la utilidad de esta familia en la simulación y modelización, porque sólo sirve para situaciones con moderada dependencia. En la Figura 5.12 se puede ver la escasa dependencia que hay con $\theta = -1$ con 1000 puntos simulados para la cópula y para la cópula con marginales normales.

Algoritmo 5.8. Sea C la cópula de FGM con parámetro θ .

I. Generar $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

II. Calcular $V = \frac{2T}{b-a}$, con

$$a = \theta(2U - 1) - 1,$$

$$b = [(1 - \theta(2U - 1))^2 + 4\theta T(2U - 1)]^{\frac{1}{2}}.$$

III. $(U, V) \sim C$.

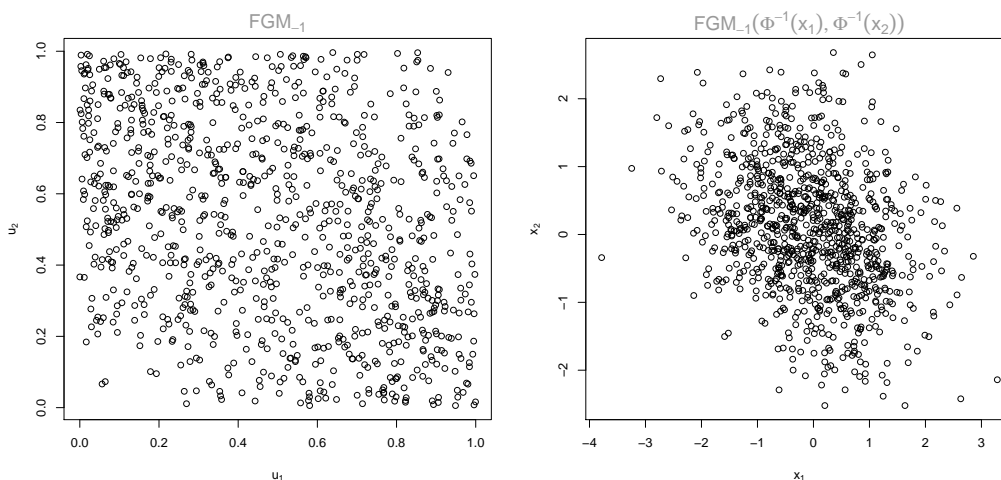


Figura 5.12: Simulación para la cópula de FGM.

5.4.4. Cópula de Plackett

En el Ejemplo 3.12, presentábamos la cópula de Plackett, dada por

$$C_\theta(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}. \tag{5.39}$$

Esta cópula tenía dependencia negativa con $\theta \in (0, 1)$ y positiva con $\theta \in (1, \infty)$. El siguiente algoritmo, debido a Johnson [37], permite simularla.

Algoritmo 5.9. Sea C la cópula de Plackett con parámetro θ .

I. Generar $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

II. Calcular $V = \frac{c - (1 - 2T)d}{2b}$, con

$$\begin{aligned} a &= T(1 - T), \\ b &= \theta + a(\theta - 1)^2, \\ c &= 2a(u\theta^2 + 1 - u) + \theta(1 - 2a), \\ d &= \sqrt{\theta} \sqrt{\theta + 4au(1 - u)(1 - \theta)^2}. \end{aligned}$$

III. $(U, V) \sim C$.

En la siguiente figura mostramos 500 puntos simulados con $\theta = 20$ para la cópula y para la distribución con marginales normales.

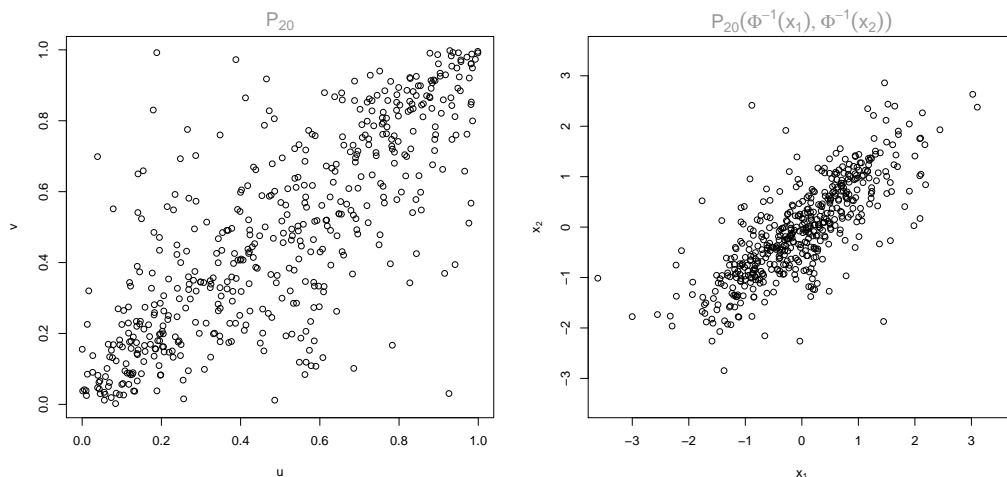


Figura 5.13: Simulación para la cópula de Plackett.

5.4.5. Cópula de Ali–Mikhail–Haq

El siguiente algoritmo también se debe a Johnson [37]. En comparación con el método de Marshall y Olkin, éste sólo vale para el caso bidimensional.

Algoritmo 5.10. Sea C la cópula de AMH con parámetro θ .

I. Generar $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

II. Calcular $V = \frac{2T(a\theta-1)^2}{b+\sqrt{c}}$, con

$$a = 1 - U,$$

$$b = -\theta(2aT + 1) + 2\theta^2 a^2 t + 1,$$

$$c = \theta^2(4a^2T - 4aT + 1) - \theta(4aT - 4T + 2) + 1.$$

III. $(U, V) \sim C$.

5.5. Paquetes copula y fCopulae

Los paquetes de **R** `copula` [83] y `fCopulae` [82] proporcionan funciones útiles e interesantes para trabajar con cópulas. Entre otras aportaciones, tienen implementados métodos para simular casi todo tipo de cópulas.

El paquete `fCopulae` funciona especialmente bien para las cópulas Arquimedianas (lista de 22 cópulas de Nelsen [59]), las elípticas (Gaussiana, t -Student, ...) y las de valores extremos (Gumbel, Galambos, ...) y por eso se hace un uso intensivo de él en el Capítulo 7. `copula` es un paquete más general, que trabaja con objetos de la clase `cópula`, pudiendo realizar estimación y contraste de bondad de ajuste para cópulas. En el Apéndice C se utiliza para generar cópulas.

Una amplia descripción de las posibilidades de los paquetes se encuentran en las referencias anteriormente citadas, a las que nos remitimos para un análisis profundo de los paquetes. Aquí nos centraremos en las aplicaciones interactivas del paquete `fCopulae`, que permiten la visualización de los gráficos de simulaciones, cópulas, densidades y generadores. Como se comentaba antes, esto es útil para saber la estructura y propiedades de una cópula.

Armstrong [2] proporciona gráficas de simulaciones para la lista de cópulas Arquimedianas de Nelsen, pero sólo para algunos valores. Con estas funciones podemos representar

gráficos para distintos parámetros. Por ejemplo, en la Figura 5.14, podemos ver la densidad de la cópula Arquimediana número 14 con $\theta = 4.3$ y 500 puntos generados según esta cópula. Las aplicaciones interactivas del paquete `fCopulae` para las cópulas implementadas se recogen y comentan en el siguiente código de **R**.

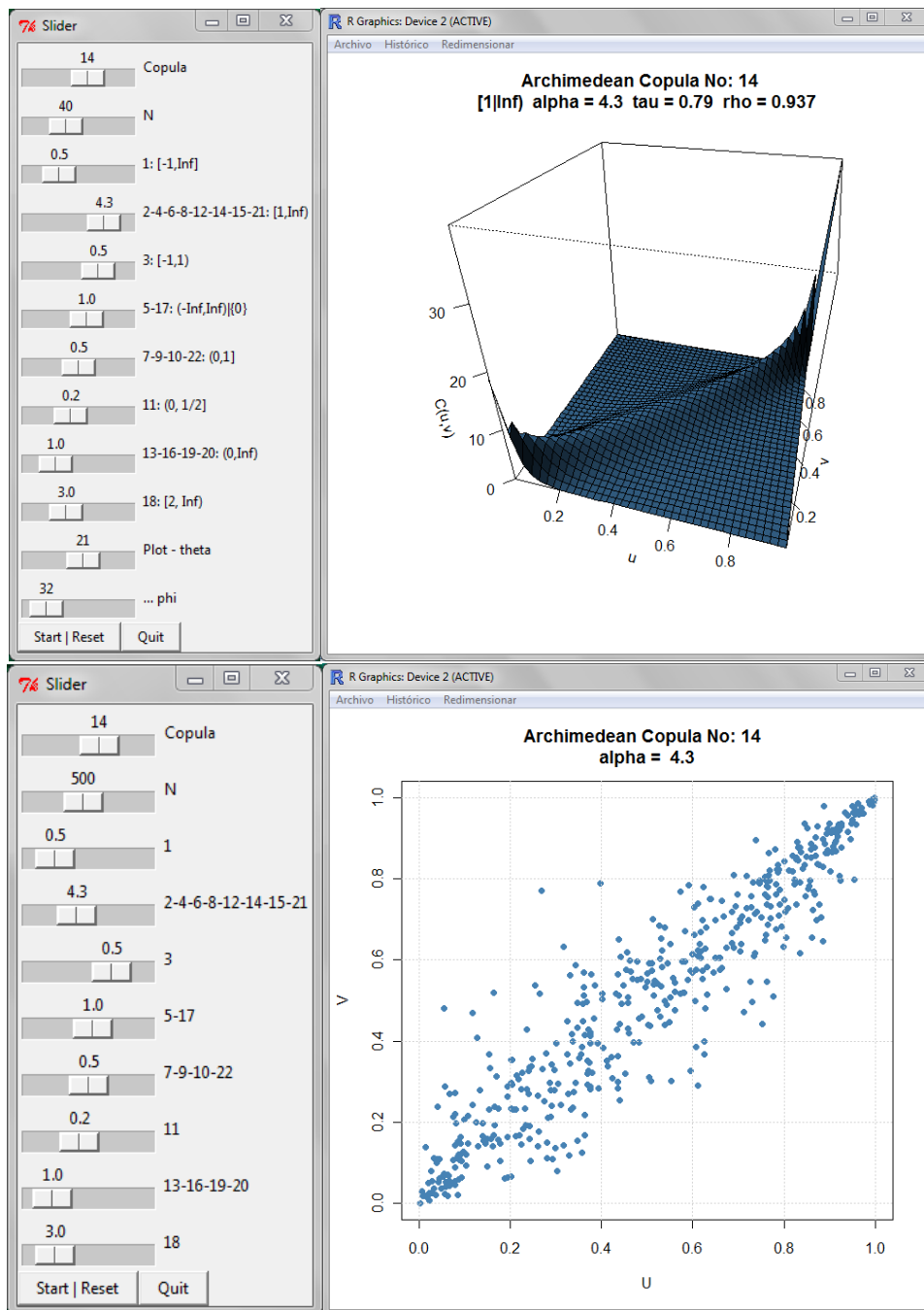


Figura 5.14: Aplicaciones de `fCopulae` para ver las gráficas de la densidad y los puntos generados.


```
library(fCopulae) #Cargar el paquete

## 22 cópulas Arquimedianas de Nelsen ##

#Generar puntos
rarchmSlider()

#Gráfica de C
parchmSlider()

#Gráfica densidad
darchmSlider()

#Gráficas generadores
PhiSlider()

#Gráficas distribuciones K asociadas a los generadores
KfuncSlider()

## Cópulas elípticas: Normal, t-Student, Cauchy ##

#Generar puntos
rellipticalSlider()

#Gráfica de C
pellipticalSlider()

#Gráfica densidad
dellipticalSlider()

## Cópulas de valores extremos: Gumbel, Galambos, Hülser-Reiss, ##
## Tawn, BB5 ##

#Generar puntos
revSlider()

#Gráfica de C
pevSlider()

#Gráfica densidad
devSlider()

#Gráfica funciones lambda(u)
evTailCoeffSlider()
```


Capítulo 6

Medidas de dependencia y cópulas

Nos ocupamos ahora de ver la relación de las cópulas con las medidas de dependencia¹ para variables aleatorias, en particular con las medidas de concordancia y las medidas de dependencia definidas por Rényi [65]. Se estudiarán las propiedades de estas medidas y su caracterización mediante cópulas. Esta será la tónica habitual del capítulo: presentación de diversos conceptos de dependencia y su caracterización mediante cópulas.

Estas caracterizaciones permiten asegurar que estos conceptos dependen únicamente de las cópulas y no de las marginales, heredando por tanto las propiedades de las cópulas (invarianza por transformaciones crecientes, invarianza de la escala, captura de la dependencia perfecta, . . .).

6.1. Medidas de concordancia

El concepto de concordancia hace referencia a la asociación entre valores “grandes” y valores “pequeños” de dos variables aleatorias. Estas variables serán *concordantes* si los valores grandes y pequeños de una tienden a estar asociados con los valores grandes y pequeños de la otra, respectivamente.

Definición 6.1. Sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector aleatorio (X, Y) de variables aleatorias continuas. Diremos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son *concordantes* si $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$ o $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$ y *discordantes* si $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$ o $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$.²

Scarsini [70] propuso en 1984 una definición axiomática de las medidas de concordancia.

¹Algunos autores prefieren hablar de *medidas de asociación* para evitar la confusión con las medidas de dependencia que definió Rényi. Como en la actualidad el término medidas de asociación se utiliza para variables factoriales, parece más adecuado hablar de medidas de dependencia de forma general y de las medidas de dependencia definidas por Rényi.

²Alternativamente, (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ y discordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Definición 6.2. Una medida real κ de dependencia entre dos variables aleatorias continuas X e Y con cópula asociada C es una *medida de concordancia* si satisface los siguientes axiomas:

- I. Está definida para todo par (X, Y) de variables aleatorias continuas.
- II. Es una medida normalizada: $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$.
- III. Es simétrica: $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
- IV. Si X e Y son independientes, $\kappa_{X,Y} = 0$.
- V. Cambio de signo: $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.
- VI. Respeta el orden de concordancia: si $C_1 \prec C_2$, entonces $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$.
- VII. Converge cuando la cópula lo hace puntualmente: si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de pares de variables aleatorias continuas, con cópulas $\{C_n\}$ que convergen puntualmente³ a C , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Para estas medidas se verifican una serie de propiedades deseables, similares a las de las cópulas.

Teorema 6.1. *Sea κ una medida de concordancia para variables aleatorias continuas X e Y .*

- I. *Si Y es casi seguro una función creciente de X , entonces $\kappa_{X,Y} = 1$.*
- II. *Si Y es casi seguro una función decreciente de X , entonces $\kappa_{X,Y} = -1$.*
- III. *Si α y β son funciones estrictamente monótonas casi por doquier en $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$, entonces $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.*

Demostración. Si Y es c.s. una función creciente de X , por la Observación 1.8, $C_{XY} = M$. Por los axiomas III y IV, $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$. De forma análoga, se tiene que $\kappa_W = \kappa_{X,Y} = -1$ cuando Y es c.s. una función decreciente de X .

El tercer apartado usa el Teorema 1.11. Supongamos que α y β son funciones estrictamente crecientes. Entonces $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$. Usando el axioma VI, como $C_{\alpha(X),\beta(Y)} \prec C_{X,Y}$ y $C_{\alpha(X),\beta(Y)} \succ C_{X,Y}$, entonces $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} \leq \kappa_{X,Y}$ y $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} \geq \kappa_{X,Y}$, es decir, $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.

Supongamos ahora que α y β son estrictamente decrecientes. Entonces $-\alpha$ y $-\beta$ son estrictamente crecientes, y procediendo como antes, $\kappa_{-\alpha(X),-\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$. Aplicando dos veces el axioma V resulta $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$. \square

³Para 2-cópulas, la convergencia puntual y uniforme equivalen, debido a la continuidad uniforme. Esto se prueba fácilmente con un *truco* del tipo $\frac{\varepsilon}{3}$.

Ejemplo 6.1. *Coefficiente de correlación lineal r de Pearson.*

Recordemos que el coeficiente de correlación lineal entre X e Y es

$$r = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}. \quad (6.1)$$

r se puede expresar en términos de la cópula C asociada a X e Y , aunque su cálculo de esta forma es más complicado:

$$r_{X,Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) - uv dF^{-1}(u) dG^{-1}(v). \quad (6.2)$$

La correlación lineal **no es una medida de concordancia**, al fallar el axioma séptimo. La manera más sencilla de probar que no es una medida de concordancia es ver que se no se verifica $r_{X,Y} = r_{\alpha(X),\beta(Y)}$, para α y β estrictamente crecientes (sí se cumple si son lineales). Veamos un contraejemplo.

Sea $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$ una cópula de FGM. Consideremos X e Y distribuidas según una exponencial de media 1. Entonces la distribución de (X, Y) está dada por

$$H_\theta(x, y) = C_\theta(1 - e^{-x}, 1 - e^{-y}). \quad (6.3)$$

Entonces

$$r_{X,Y} = \frac{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = \mathbb{E}[XY] - 1, \quad (6.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_0^\infty \int_0^\infty xy dH_\theta(x, y) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty xy((1 + \theta)e^{-x-y} - 2\theta e^{-2x-y} - 2\theta e^{-x-2y} + 4\theta e^{-2x-2y}) dx dy \\ &= 1 + \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Con lo cual $r_{X,Y} = \frac{\theta}{4}$. Si consideramos las funciones estrictamente crecientes $\alpha(t) = \beta(t) = 1 - e^{-t}$, tenemos

$$r_{\alpha(X),\beta(Y)} = \text{Corr}(F(X), G(Y)) \stackrel{(6.36)}{=} \rho_{X,Y} \stackrel{\text{Ej.6.5}}{=} \frac{\theta}{3}, \quad (6.5)$$

con lo que $r_{X,Y} \neq r_{\alpha(X),\beta(Y)}$. ◇

El siguiente teorema y sus corolarios son ampliamente usados en las siguientes secciones para caracterizar algunas medidas de concordancia en términos de cópulas.

Teorema 6.2. Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) dos vectores aleatorios independientes de variables continuas con distribuciones marginales F y G iguales y cópulas C_1 y C_2 , respectivamente. Si Q denota la diferencia entre la probabilidad de concordancia y la de discordancia de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , es decir,

$$Q = \mathbb{P} \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0 \} - \mathbb{P} \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0 \}, \tag{6.6}$$

entonces⁴,

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \tag{6.7}$$

Demostración. Como las variables son continuas,

$$\mathbb{P} \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0 \} = 1 - \mathbb{P} \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0 \}$$

y por tanto

$$Q = 2\mathbb{P} \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0 \} - 1. \tag{6.8}$$

Además $\mathbb{P} \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0 \} = \mathbb{P} \{ X_1 > X_2, Y_1 > Y_2 \} + \mathbb{P} \{ X_1 < X_2, Y_1 < Y_2 \}$ y estas probabilidades pueden ser calculadas integrando sobre la distribución de uno de los vectores (X_1, Y_1) o (X_2, Y_2) , por ejemplo (X_1, Y_1) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ X_1 > X_2, Y_1 > Y_2 \} &= \mathbb{P} \{ X_2 < X_1, Y_2 < Y_1 \} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P} \{ X_2 \leq x, Y_2 \leq y \} dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Usando las transformadas de probabilidad $u = F(x)$ y $v = G(y)$ resulta

$$\mathbb{P} \{ X_1 > X_2, Y_1 > Y_2 \} = \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \tag{6.10}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ X_1 < X_2, Y_1 < Y_2 \} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P} \{ X_2 > x, Y_2 > y \} dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} 1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

⁴La integración $\iint_{\mathbb{I}^2}$ equivale a $\int_0^1 \int_0^1$.

$$= \int \int_{\mathbb{I}^2} 1 - u - v + C_2(u, v) dC_1(u, v). \tag{6.11}$$

Como C_1 es la distribución conjunta del par (U, V) de uniformes $\mathcal{U}(0, 1)$, $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = \frac{1}{2}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \int \int_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Así,

$$\mathbb{P}\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} = 2 \int \int_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \tag{6.13}$$

Sustituyendo (6.12) en (6.8) tenemos la expresión (6.6) para Q . □

Corolario 6.1. Sean C_1, C_2 y Q en las hipótesis del Teorema 6.1. Entonces:

- I. Q es simétrica en sus argumentos: $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.
- II. Q es no decreciente en cada argumento: si $C_1 \prec C'_1$ y $C_2 \prec C'_2$, entonces $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$.
- III. Las cópulas se pueden reemplazar por sus cópulas de supervivencia: $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$.

Demostración. Para probar el punto I, observamos que en la demostración del Teorema 6.1, para calcular la probabilidad $\mathbb{P}\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\}$, integrábamos con respecto a la distribución de (X_1, Y_1) . Como los papeles de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , son simétricos, eligiendo (X_2, Y_2) para integrar, hubiese resultado

$$Q(C_1, C_2) = Q = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 \stackrel{(6.6)}{=} Q(C_2, C_1). \tag{6.14}$$

Para el punto II, sólo necesitamos probar que Q es no decreciente en el segundo argumento, pues así lo será también en el primero, en virtud de la simetría. Esto es elemental, porque si $C_2 \prec C'_2$, $0 \leq C_2(u, v) \leq C'_2(u, v)$, $\forall (u, v) \in \mathbb{I}^2$, es inmediato que $Q(C_1, C_2) \leq Q(C_1, C'_2)$, para cualquier cópula C_1 .

El punto III se prueba fácilmente suponiendo que C_1 es absolutamente continua. En ese caso $d\widehat{C}_1(u, v) = \frac{\partial^2 \widehat{C}_1(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C_1(1-u, 1-v)}{\partial u \partial v}$ y tenemos

$$Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 u + v - 1 + C_2(1 - u, 1 - v) \frac{\partial^2 C_1(1 - u, 1 - v)}{\partial u \partial v} dv du - 1. \tag{6.15}$$

Haciendo el cambio de variable $\begin{cases} s = 1 - u \\ t = 1 - v \end{cases}$, con $\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \right| = 1$, la integral es

$$\int_1^0 \int_1^0 1 - s - t + C_2(s, t) \frac{\partial^2 C_1(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds = \int_0^1 \int_0^1 C_2(s, t) dC_1(s, t) + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad (6.16)$$

$$= \int \int_{\mathbb{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \quad (6.17)$$

Por tanto $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$. En el caso de que C_1 no sea absolutamente continua, el procedimiento sería parecido: usar el cambio de variable y que

$$d\left(\widehat{C}_1(u, v)\right) = d(u + v - 1 + C_1(1 - u, 1 - v)) = d(C_1(1 - u, 1 - v)). \quad (6.18)$$

□

Una consecuencia interesante de este corolario es que muchas de las medidas de concordancia κ derivadas de Q van a verificar $\kappa_C = \kappa_{\widehat{C}}$, debido a la propiedad III y a la Tabla 1.1.

Corolario 6.2. *Dada una cópula C , se cumple que $Q(C, C) \in [-1, 1]$, $Q(C, M) \in [0, 1]$, $Q(C, W) \in [-1, 0]$ y $Q(C, \Pi) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Además, para las anteriores funciones, los mínimos se alcanzan con $C = W$, los máximos con $C = M$ y $Q(\Pi, \Pi) = 0$.*

Demostración. Como Q es no decreciente en sus argumentos, los máximos se alcanzarán para M y los mínimos para W . Hay que evaluar Q en las distintas combinaciones de M , W y Π . Comenzamos con $C_1 = M$. Hay que tener en cuenta que M acumula toda la probabilidad en la diagonal $u = v$ (su soporte). Entonces:

$$Q(M, M) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} \min(u, v) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u du - 1 = 1,$$

$$Q(M, \Pi) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} uv dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 du - 1 = \frac{1}{3},$$

$$Q(M, W) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} \max(u + v - 1, 0) dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 (2u - 1) du - 1 = 0.$$

Para $C_1 = W$, usamos que su soporte es la diagonal secundaria $v = 1 - u$:

$$Q(W, M) = Q(M, W) = 0,$$

$$Q(W, \Pi) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} uv dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1 - u) du - 1 = -\frac{1}{3},$$

$$Q(W, W) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} \max(u + v - 1, 0) dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0 du - 1 = -1.$$

Con Π es sencillo porque al ser absolutamente continua $d\Pi(u, v) = dvdu$.

$$Q(\Pi, M) = Q(M, \Pi) = \frac{1}{3},$$

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} uv d\Pi(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv dv du - 1 = 0,$$

$$Q(\Pi, W) = Q(W, \Pi) = -\frac{1}{3}.$$

Entonces, $-1 = Q(W, W) \leq Q(C, C) \leq Q(M, M) = 1$, $0 = Q(W, M) \leq Q(C, M) \leq Q(M, M) = 1$, $-1 = Q(W, W) \leq Q(C, W) \leq Q(M, W) = 0$ y $-\frac{1}{3} = Q(W, \Pi) \leq Q(C, C) \leq Q(M, \Pi) = \frac{1}{3}$. Además $Q(\Pi, \Pi) = 0$. \square

En la Figura 6.1 se pueden ver las conclusiones del teorema para las funciones $Q(\cdot, \cdot)$, $Q(\cdot, \Pi)$, $Q(\cdot, M)$ y $Q(\cdot, W)$.

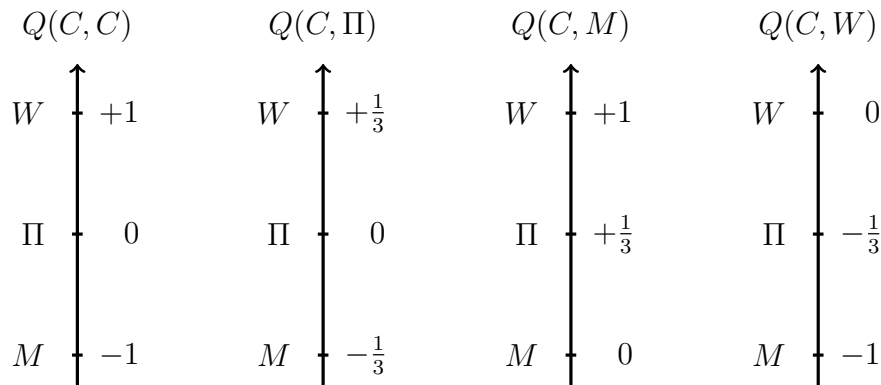


Figura 6.1: Distintos ejes de concordancia.

A veces el cálculo de Q según el Teorema 6.1 es complicado, por lo que es útil el siguiente teorema.

Teorema 6.3. Sean C_1 y C_2 dos cópulas. Entonces

$$\int \int_{\mathbb{I}^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) = \frac{1}{2} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C_1(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C_2(u, v) du dv. \tag{6.19}$$

Demostración. Cuando las cópulas son absolutamente continuas, el resultado se prueba mediante integración por partes. En este caso,

$$\int \int_{\mathbb{I}^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C_1(u, v) \frac{\partial^2 C_2(u, v)}{\partial u \partial v} dv du. \tag{6.20}$$

Evaluando la integral interior por partes, resulta

$$\int_0^1 C_1(u, v) \frac{\partial^2 C_2(u, v)}{\partial u \partial v} dv = C_1(u, v) \frac{\partial C_2(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0}^{v=1} - \int_0^1 \frac{\partial C_2(u, v)}{\partial u} \frac{\partial C_2(u, v)}{\partial v} dv$$

$$= u - \int_0^1 \frac{\partial C_2(u, v)}{\partial u} \frac{\partial C_2(u, v)}{\partial v} dv.$$

Si ahora integramos en u desde 0 hasta 1, tenemos probado el teorema. Para la prueba del caso general puede verse [46]. □

Finalizamos la introducción a las medidas de concordancia con otro resultado que también permite construir medidas de concordancia. Se debe a Scarsini [70] y omitiremos su demostración porque utiliza técnicas de la Teoría de la Probabilidad que llevaría demasiado espacio explicar con detalle.

Teorema 6.4. Sean X e Y dos variables aleatorias y ψ una función monótona y acotada, definida en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Entonces

$$\kappa_{X,Y} = \int_0^1 \int_0^1 k \psi\left(u - \frac{1}{2}\right) \psi\left(v - \frac{1}{2}\right) dC_{XY}(u, v) \tag{6.21}$$

es una medida de concordancia, con $k = \left(\int_0^1 \psi^2\left(u - \frac{1}{2}\right) du\right)^{-1}$.

En el resto de la sección se mostrarán medidas de concordancia conocidas.

6.1.1. Tau de Kendall

Definición 6.3. La *Tau de Kendall* de las variables aleatorias X e Y , denotada por τ se define como

$$\tau_{X,Y} = \mathbb{P}\left\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0\right\} - \mathbb{P}\left\{(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0\right\}, \tag{6.22}$$

donde (\tilde{X}, \tilde{Y}) es una copia independiente de (X, Y) .

Teorema 6.5. Si X e Y son continuas, en virtud del Teorema 6.2, la *Tau de Kendall* se puede expresar en términos de la cópula C asociada:

$$\tau_C = Q(C, C) = 4 \int \int_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \tag{6.23}$$

La igualdad (6.23) se puede expresar mediante a la esperanza de la variable $C(U, V)$, donde $U, V \sim \mathcal{U}(0, 1)$ tienen distribución conjunta C :

$$\tau_C = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1. \tag{6.24}$$

La distribución de la variable $C(U, V)$ era K_C , como se veía en (4.23). Esta distribución se denomina *distribución de Kendall*.

Observación 6.1. Por el Teorema 6.3, la Tau de Kendall se puede calcular de una forma más sencilla:

$$\tau_C = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) dv du. \tag{6.25}$$

◁

Ejemplo 6.2. La familia de cópulas de Fréchet estaba dada por

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v) + \beta W(u, v),$$

con $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y $\alpha + \beta \leq 1$. Vamos a calcular la Tau de Kendall mediante la definición y las propiedades del Corolario 6.2. Primero notemos que [3]

$$dC_{\alpha,\beta} = \alpha dM + (1 - \alpha - \beta)d\Pi + \beta dW.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dC_{\alpha,\beta}(u, v) &= \alpha \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dM(u, v) + \beta \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dW(u, v) \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta) \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) d\Pi(u, v). \end{aligned}$$

Separando cada una de estas integrales y usando que $\iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) dC(u, v) = \frac{Q(C,C)+1}{4}$, podemos calcular las integrales con el Corolario 6.2. Por ejemplo, la primera es

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dM(u, v) &= \alpha \frac{Q(M, M) + 1}{4} + (1 - \alpha - \beta) \frac{Q(\Pi, M) + 1}{4} + \beta \frac{Q(W, M) + 1}{4} \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{1 - \alpha - \beta}{3} + \frac{\beta}{4} = \frac{4 + 2\alpha - \beta}{12}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\iint_{\mathbb{I}^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dC_{\alpha,\beta}(u, v) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3 - 2\beta - \beta^2}{12} \tag{6.26}$$

y multiplicando por 4 y restando 1, se tiene

$$\tau_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2\beta - \beta^2}{3}. \tag{6.27}$$

$\tau_{\alpha,\beta}$ se comporta como cabría esperar, pues $\tau_{1,0} = 1$, $\tau_{0,1} = -1$ y $\tau_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0$. ◊

Ejemplo 6.3. La familia de cópulas de Marshall–Olkin se presentó en el Ejemplo 1.12. Estas cópulas tienen componente singular, pero gracias a la expresión (6.25), su Tau de

Kendall es fácil de calcular. Si $C_{\alpha,\beta}$ es una cópula de esta familia, con $0 < \alpha, \beta < 1$,

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta}, & u^\alpha \leq v^\beta \end{cases} .$$

Las derivadas parciales de $C_{\alpha,\beta}$ no existen en $u^\alpha = v^\beta$, así que

$$\frac{\partial}{\partial u}C_{\alpha,\beta}(u, v)\frac{\partial}{\partial v}C_{\alpha,\beta}(u, v) = \begin{cases} (1 - \alpha)u^{1-2\alpha}v, & u^\alpha > v^\beta \\ (1 - \beta)uv^{1-2\beta}, & u^\alpha < v^\beta \end{cases} .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha,\beta} &= 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}C_{\alpha,\beta}(u, v)\frac{\partial}{\partial v}C_{\alpha,\beta}(u, v)dvdu \\ &= 1 - 4 \int_0^1 \int_0^{u^{\frac{\alpha}{\beta}}} (1 - \alpha)u^{1-2\alpha}v dvdu + 4 \int_0^1 \int_{u^{\frac{\alpha}{\beta}}}^1 (1 - \beta)uv^{1-2\beta} dvdu \\ &= 1 - 4 \left(\frac{1}{4} \left[\frac{\beta - \alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta} \right] + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta} \right] \right) \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta} . \end{aligned}$$

Es interesante observar que $\tau_{\alpha,\beta}$ es igual a $S_{\alpha,\beta}(1, 1)$, el $C_{\alpha,\beta}$ -volumen de la componente singular de la cópula $C_{\alpha,\beta}$. Además, $\tau_{\alpha,\beta}$ tiene la expresión de la cópula de Ali-Mikhail-Haq con $\theta = 1$, evaluada en $u = \alpha$ y $v = \beta$. En el Capítulo 8 veremos que esta cópula aparece a menudo como un caso particular y se denota por $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$. \diamond

Teorema 6.6. *La Tau de Kendall es una medida de concordancia que además cumple:*

$$\tau_{X,Y} = 1 \Leftrightarrow C_{XY} = M \text{ y } \tau_{X,Y} = -1 \Leftrightarrow C_{XY} = W. \tag{6.28}$$

Demostración. Usando que τ se expresa de la forma (6.23) y por las propiedades de Q , recogidas en los Corolarios 6.1 y 6.2, los seis primeros axiomas se prueban fácilmente.

Para el séptimo axioma, necesitamos hacer uso de un lema que involucra nociones de Teoría de la Probabilidad un poco más avanzadas y que no tiene mucho sentido discutir aquí. Su demostración se puede ver en [70].

En cuanto a las equivalencias (6.28), la implicación que no es elemental a partir del Corolario 6.1 (\Leftarrow) se puede ver en [20]. \square

Teorema 6.7. *Sean X e Y variables aleatorias con una cópula Arquimediana C con generador φ . La Tau de Kendall de X e Y está dada por*

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \tag{6.29}$$

Demostración. Por la Observación 6.1,

$$\tau_C = \tau_C = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1. \tag{6.30}$$

Integrando por partes⁵ en (6.30),

$$\int_0^1 t dK_C(t) = 1K_C(1) - 0K_C(0) - \int_0^1 K_C(t) dt = 1 - \int_0^1 K_C(t) dt \tag{6.31}$$

y sustituyendo (6.31) en (6.30) y usando $K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$, resulta

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} dz. \tag{6.32}$$

□

Ejemplo 6.4. Sea C_θ la cópula de Clayton, con $\theta \in (0, \infty)$. Un generador de esta cópula es $\varphi_\theta(t) = t^{-\theta} - 1$. Por tanto:

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{-\theta} - 1}{-\theta t^{-\theta-1}} dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left[\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\theta}{\theta+2}.$$

Así, $\tau_\theta \in (0, 1)$ y, como habíamos visto antes, esta cópula captura sólo dependencia positiva (concordancia). ◇

6.1.2. Rho de Spearman

Definición 6.4. La *Rho de Spearman* de las variables aleatorias X e Y , denotada⁶ por ρ se define como

$$\rho_{X,Y} = 3 \left(\mathbb{P} \left\{ (X - \tilde{X})(Y - Y') > 0 \right\} - \mathbb{P} \left\{ (X - \tilde{X})(Y - Y') < 0 \right\} \right), \tag{6.33}$$

donde (X, Y) , (\tilde{X}, \tilde{Y}) y (X', Y') son copias mutuamente independientes.

Como \tilde{X} e Y' son independientes, $C_{\tilde{X}Y'} = \Pi$ y se tiene el siguiente teorema.

⁵En [3] se puede ver que si F_1 y F_2 son dos funciones no decrecientes y continuas por la derecha en $[a, b]$ y sin puntos de discontinuidad en (a, b) ,

$$\int_{(a,b]} F_1(x) dF_2(x) = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a) - \int_{(a,b]} F_2(x) dF_1(x).$$

⁶No confundir con el coeficiente de correlación lineal entre dos variables X e Y , al que denotábamos por $r = \text{Corr}(X, Y)$.

Teorema 6.8. Si X e Y son continuas, en virtud del Teorema 6.2, la Rho de Spearman se puede expresar en términos de la cópula C asociada:

$$\rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{\mathbb{I}^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3, \quad (6.34)$$

donde la tercera igualdad se debe a la simetría de Q .

La Rho de Spearman también se puede obtener a partir del Teorema 6.4, con $\psi(x) = x$:

$$\begin{aligned} \kappa_{X,Y} &= k \int_0^1 \int_0^1 \left(u - \frac{1}{2}\right) \left(v - \frac{1}{2}\right) dC_{XY}(u, v) \\ &= k \left(\int_0^1 \int_0^1 uv dC_{XY}(u, v) - \int_0^1 \frac{u}{2} du - \int_0^1 \frac{v}{2} dv + \frac{1}{4} \right) \\ &= k \left(\int_0^1 \int_0^1 uv dC_{XY}(u, v) - \frac{1}{4} \right) = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC_{XY}(u, v) - 3 \\ &= \rho_{X,Y}. \end{aligned}$$

Observación 6.2. Si U y V son variables uniformes con cópula asociada C y como $\mathbb{E}[\mathcal{U}(0, 1)] = \frac{1}{2}$ y $\text{Var}(\mathcal{U}(0, 1)) = \frac{1}{12}$, podemos expresar ρ_C como

$$\rho_C = 12\mathbb{E}_C[UV] - 3 = \frac{\mathbb{E}_C[UV] - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \frac{\mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}} = \text{Corr}(U, V). \quad (6.35)$$

Por tanto, la Rho de Spearman coincide con el coeficiente de correlación lineal de Pearson para variables uniformes. Una consecuencia más interesante es que si $X \sim F$ e $Y \sim G$ son dos variables aleatorias con cópula asociada C y $U = F(X), V = G(Y) \sim \mathcal{U}(0, 1)$, entonces

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = \text{Corr}(F(X), G(Y)). \quad (6.36)$$

De esta forma, **la Rho de Spearman entre dos variables aleatorias X e Y es el coeficiente de correlación lineal entre sus transformadas de probabilidad.** A menudo se suele utilizar este enfoque para definir $\rho_{X,Y}$, a partir de (6.36). \triangleleft

Observación 6.3. Otra expresión posible de ρ , que se obtiene a partir de (6.34), es

$$\rho_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv. \quad (6.37)$$

Entonces ρ_C se puede ver como el volumen (con signo) comprendido entre C y Π . Es decir, la “diferencia” entre la dependencia, medida por C , y la independencia, medida por Π . Esta diferencia tiene el inconveniente de que puede ser nula sin que C sea Π , por ejemplo con $C = \frac{M+W}{2}$. Este problema se soluciona con la Sigma de Schweizer y Wolff

(6.57), que considera la distancia L^1 entre C y Π . De una forma similar, las siguientes medidas, basadas en las normas L^2 y L^∞ son medidas de concordancia [73]:

$$\kappa_2 = \left(90 \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv]^2 dudv \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.38}$$

$$\kappa_\infty = 4 \sup_{u, v \in [0, 1]} |C(u, v) - uv|. \tag{6.39}$$

◁

Teorema 6.9. *La Rho de Spearman es una medida de concordancia que además cumple:*

$$\rho_{X, Y} = 1 \Leftrightarrow C_{XY} = M \text{ y } \rho_{X, Y} = -1 \Leftrightarrow C_{XY} = W. \tag{6.40}$$

Demostración. En virtud del Teorema 6.1 y de que ρ se obtiene con $\psi(x) = x$, ρ es una medida de concordancia. Otra forma de probar esto es utilizando que la convergencia de C_n a C es uniforme y el clásico resultado del cálculo que asegura la convergencia de las integrales.

Para las equivalencias (6.28), la implicación que no es elemental a partir del Corolario 6.1 (\Leftarrow) se puede ver en [20]. ◻

Ejemplo 6.5. Sea C_θ una cópula de la familia de FGM, con $\theta \in [-1, 1]$ y

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) dvdu &= \int_0^1 u \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 + \theta u(1 - u) \left[\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} \right]_0^1 du \\ &= \int_0^1 \frac{u}{2} + \frac{\theta}{6} u(1 - u) du = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36} = \frac{9 + \theta}{36}. \end{aligned}$$

Así, $\rho_\theta = 12 \frac{9 + \theta}{36} - 3 = \frac{\theta}{3}$ y $\rho_\theta \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, con lo que se aprecia la débil dependencia que puede modelar la familia de FGM. ◊

Ejemplo 6.6. Para la familia de Fréchet, podemos calcular $\rho_{\alpha, \beta}$ directamente a partir de la definición. Para ello

$$\begin{aligned} Q(C_{\alpha, \beta}, \Pi) &= \alpha Q(M, \Pi) + (1 - \alpha - \beta) Q(\Pi, \Pi) + \beta Q(W, \Pi) \\ &= \alpha \frac{1}{3} + (1 - \alpha - \beta) 0 + \beta \frac{-1}{3} = \frac{\alpha - \beta}{3}. \end{aligned}$$

Entonces $\rho_{\alpha, \beta} = 3Q(C_{\alpha, \beta}, \Pi) = \alpha - \beta.$ ◊

6.1.3. Gamma de Gini

Otra medida de concordancia menos conocida que la τ y la ρ es la Gamma de Gini.

Definición 6.5. Dadas dos variables aleatorias X e Y , con cópula asociada C , se define el *coeficiente de cograduación de Gini*, o de forma más breve, la *Gamma de Gini* como

$$\gamma_{X,Y} = 2 \int \int_{\mathbb{I}^2} (|u + v - 1| - |u - v|) dC(u, v). \tag{6.41}$$

Otra forma equivalente de expresar (6.41) es

$$\gamma_C = 2\mathbb{E} [|U + V - 1| - |U - V|]. \tag{6.42}$$

Teorema 6.10. Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C . El índice de cograduación de Gini está dado por

$$\gamma_C = \gamma_{X,Y} = Q(C, M) + Q(C, W). \tag{6.43}$$

Demostración. Es un simple cálculo. Lo primero es notar que $M(u, v) = \min(u, v) = \frac{u+v-|u-v|}{2}$ y $W(u, v) = \max(u+v-1, 0) = \frac{u+v-1+|u+v-1|}{2}$. Así, y debido a que $\int \int_{\mathbb{I}^2} u dC(u, v) = \frac{1}{2}$ y $\int \int_{\mathbb{I}^2} v dC(u, v) = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$Q(C, M) = 1 - 2 \int \int_{\mathbb{I}^2} |u - v| dC(u, v),$$

$$Q(C, W) = 2 \int \int_{\mathbb{I}^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 1,$$

de donde se sigue (6.43). □

Observación 6.4. Notemos que la Rho de Spearman medía la “distancia” de C con Π y ahora ponderamos la “distancia” de C con M y W . ◁

En la siguiente expresión se prueba que γ depende sólo de las diagonales $V = U$ y $V = 1 - U$ de la cópula C , con lo que cualquier cópula con las mismas diagonales que C tendrá la misma Gamma de Gini. Además, permite un cálculo mucho más directo.

Corolario 6.3. En las hipótesis del Teorema 6.10,

$$\gamma_C = 4 \left[\int_0^1 C(u, 1 - u) du - \int_0^1 u - C(u, u) du \right]. \tag{6.44}$$

Demostración. Es inmediato usando la simetría de Q y los cálculos de la demostración del Corolario 6.2. □

Ejemplo 6.7. Sea C_θ una cópula de la familia de FGM. Entonces:

$$C_\theta(u, u) = u^2 + \theta(u^4 - 2u^3 + u^2),$$

$$C_\theta(u, 1 - u) = u - u^2 + \theta(u^4 - 2u^3 + u^2).$$

Por lo tanto,

$$\gamma_\theta = 4 \left[\frac{5 + \theta}{30} - \frac{5 - \theta}{30} \right] = \frac{4\theta}{15}.$$

◇

Teorema 6.11. Si X e Y son dos variables continuas, $\gamma_{X,Y}$ es una medida de concordancia.

Demostración. Usando la representación (6.43) y las propiedades de Q se prueban los primeros seis axiomas. El séptimo se prueba usando la convergencia uniforme de $\{C_n\}$, ya que las integrales de (6.44) son integrales de Riemann. □

6.1.4. Beta de Blomqvist

La última medida de concordancia que veremos usa una modificación de la ecuación (6.6), midiendo la concordancia entre un vector aleatorio (X, Y) y un punto fijo (\tilde{x}, \tilde{y}) , usualmente el vector de medianas.

Definición 6.6. Si X e Y son dos variables aleatorias con medianas \tilde{x} y \tilde{y} , se define el *coeficiente de correlación de medianas*, o de forma más breve, la *Beta de Blomqvist* como

$$\beta_{X,Y} = \mathbb{P} \{ (X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0 \} - \mathbb{P} \{ (X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) < 0 \}. \tag{6.45}$$

Una de las ventajas de este coeficiente es que su cálculo es trivial, a diferencia de las anteriores medidas, cuya expresión analítica muchas veces no se puede calcular.

Teorema 6.12. Si X e Y son dos variables continuas, $\beta_{X,Y}$ está dada por

$$\beta_{X,Y} = 4C_{X,Y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - 1. \tag{6.46}$$

Demostración. Por ser X e Y continuas y como $F(\tilde{x}) = G(\tilde{y}) = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \beta_{X,Y} &= 2\mathbb{P} \{ (X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0 \} - 1 \\ &= 2 [\mathbb{P} \{ X < \tilde{x}, Y < \tilde{y} \} + \mathbb{P} \{ X > \tilde{x}, Y > \tilde{y} \}] - 1 \\ &= 2 [H(\tilde{x}, \tilde{y}) + (1 - F(\tilde{x}) - G(\tilde{y}) + H(\tilde{x}, \tilde{y}))] - 1 \end{aligned}$$

$$= 4H(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1.$$

Como $H(\tilde{x}, \tilde{y}) = C(F(\tilde{x}), G(\tilde{y})) = C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, se sigue (6.46). □

Ejemplo 6.8. Si C_θ es de la familia de FGM, $\beta_\theta = \frac{\theta}{4}$. ◇

Ejemplo 6.9. Para la familia de Gumbel, $C_\theta(u, v) = \exp\left[-\left((-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]$ con $\theta \in [1, \infty)$,

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \exp\left[-2^{\frac{1}{\theta}} \log 2\right] = 2^{-2^{\frac{1}{\theta}}}, \tag{6.47}$$

con lo cual $\beta_\theta = 2^{2-2^{\frac{1}{\theta}}} - 1$. ◇

Teorema 6.13. Si X e Y son dos variables continuas, $\beta_{X,Y}$ es una medida de concordancia.

Demostración. Es trivial usando (6.46) y las propiedades de las cópulas. □

6.1.5. Relación entre las medidas de concordancia

A continuación se estudia la relación entre las distintas medidas de concordancia vistas. En particular, entre las dos más utilizadas: la Tau de Kendall y la Rho de Spearman. Estas relaciones son interesantes cuando conocemos una medida, pues podemos delimitar el rango en el que se va a mover otra medida relacionada (útil cuando no es calculable analíticamente). En ese sentido, el Teorema 6.16 proporciona cotas para τ , ρ y γ a partir de β , cuyo cálculo es trivial.

La principal relación entre τ y ρ está recogida en el Corolario 6.4. Para probarlo, se necesitan dos teoremas. Sus demostraciones no son complicadas pero sí un poco largas, por lo que las vamos a omitir. Se pueden ver en [59].

Teorema 6.14. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas, y τ y ρ las medidas de Kendall y Spearman. Entonces

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1. \tag{6.48}$$

Teorema 6.15. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas, y τ y ρ las medidas de Kendall y Spearman. Entonces

$$\frac{1 + \rho}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau}{2}\right)^2, \tag{6.49}$$

$$\frac{1 - \rho}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau}{2}\right)^2. \tag{6.50}$$

Ordenando (6.49) y (6.50), se tiene:

Corolario 6.4. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas, y τ y ρ las medidas de Kendall y Spearman. Entonces

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \quad \tau \geq 0, \tag{6.51}$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \quad \tau \leq 0. \tag{6.52}$$

La Figura 6.2 muestra la región delimitada por las restricciones (6.51) y (6.52). En [59, 45] se pueden ver varias cópulas con (τ, ρ) en la frontera de la región, lo que muestra que la región es la óptima posible y no puede ser “estrechada”.

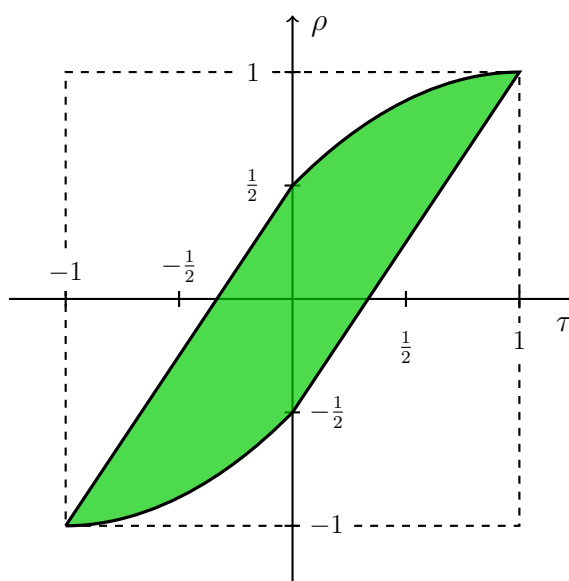


Figura 6.2: Región para (τ, ρ) en variables continuas.

El siguiente teorema se obtiene como aplicación directa del Teorema 3.3, ya que al conocer β , sabemos que la imagen del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ por C es $\frac{\beta+1}{4}$ y se pueden calcular τ , ρ y γ para las cotas dadas por dicho teorema. En [59] se puede ver con más detalle.

Teorema 6.16. Si X e Y son variables aleatorias continuas con cópula C , se tienen las siguientes relaciones entre la Beta de Blomqvist y la Tau de Kendall, la Rho de Spearman y la Gamma de Gini:

$$\frac{1}{4}(1 + \beta)^2 - 1 \leq \tau \leq 1 - \frac{1}{4}(1 - \beta)^2, \tag{6.53}$$

$$\frac{3}{16} (1 + \beta)^3 - 1 \leq \rho \leq 1 - \frac{3}{16} (1 - \beta)^3, \tag{6.54}$$

$$\frac{3}{8} (1 + \beta)^2 - 1 \leq \gamma \leq 1 - \frac{3}{8} (1 - \beta)^2. \tag{6.55}$$

La Figura 6.3 muestra las regiones para (β, τ) , (β, ρ) y (β, γ) . Frente a la ventaja del fácil cálculo de β está el inconveniente de que las regiones son bastante amplias.

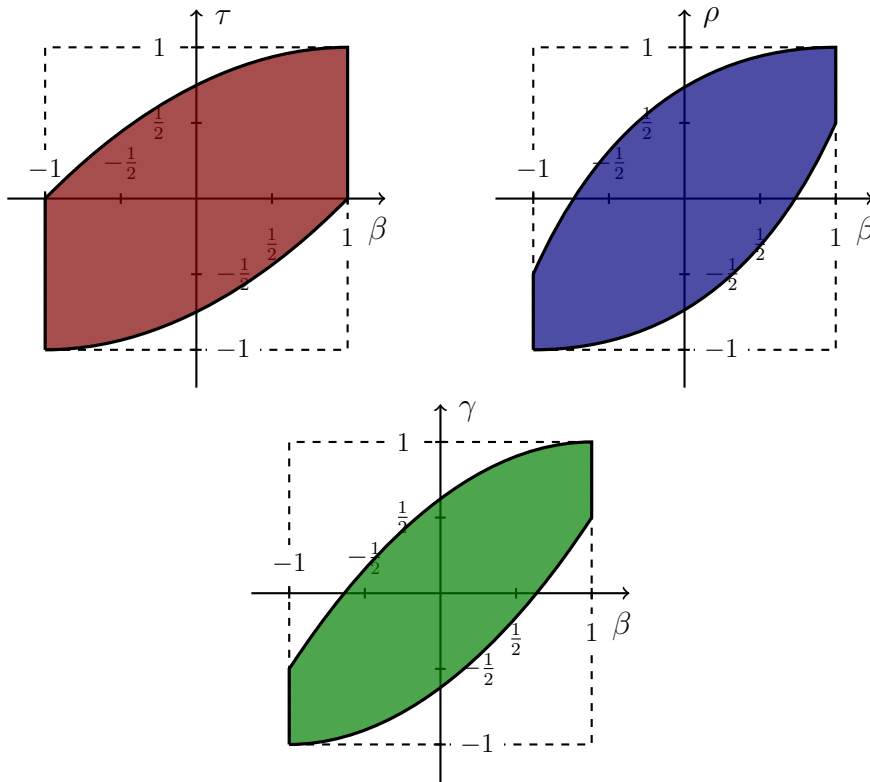


Figura 6.3: Regiones para (β, τ) , (β, ρ) y (β, γ) en variables continuas.

6.2. Medidas de dependencia

En 1959, Rényi [65] propuso una serie de axiomas para lo que llamaría medidas de dependencia. Estas medidas van a medir la dependencia entre dos variables X e Y de una forma distinta a como lo hacen las medidas de concordancia, pues no distinguirán entre dependencia positiva y negativa. Expresado en términos de la correlación lineal, las medidas de concordancia se comportan como r (como ya vimos, de una forma más flexible) y las de dependencia como $|r|$.

Hay mucha bibliografía sobre este tema y sobre la elección de los axiomas deseables, pues los axiomas de Rényi son considerados demasiado estrictos. Nosotros seguiremos los de Schweizer y Wolff [73], algo más permisivos y que enunciamos convenientemente en términos de cópulas.

Definición 6.7. Una medida numérica δ entre dos variables X e Y continuas cuya cópula es C es una *medida de dependencia* si satisface los siguientes axiomas:

- I. δ está definida para cualquier par de variables aleatorias continuas.
- II. $\delta_{X,Y} = \delta_{X,Y}$.
- III. $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.
- IV. $\delta_{X,Y} = 0$ si y sólo si X e Y son independientes.
- V. $\delta_{X,Y} = 1$ si y sólo si X e Y son funciones monótonas crecientes una de la otra.
- VI. Si α y β son funciones estrictamente monótonas en $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$, entonces $\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}$.
- VII. Si la distribución conjunta de X e Y es una normal bivalente con coeficiente de correlación r , entonces $\delta_{X,Y}$ es una función ϕ estrictamente creciente de $|r|$.
- VIII. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias continuas con cópulas C_n , y si $\{C_n\}$ converge puntualmente a C , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{C_n} = \delta_C$.

Estos axiomas difieren de los de Rényi en los siguientes puntos:

- No están restringidos a variables continuas.
- V era “ $\delta_{X,Y} = 1$ si y sólo si o $X = f(Y)$ o $Y = g(X)$ para ciertas funciones f y g Borel medibles”.
- VI era “Si f y g son funciones Borel medibles e inyectivas, entonces $\delta_{f(X),g(Y)} = \delta_{X,Y}$ ”.
- En VII, se requería que $\delta_{X,Y}$ fuese exactamente $|r|$.
- No se incluía VIII.

Bajo estos axiomas, Rényi probó que la *única* medida de dependencia que satisfacía estos axiomas era el coeficiente de correlación máximo:

$$\delta_{X,Y} = \sup_{f,g \text{ Borel med.}} \text{Corr}(f(X), g(Y)). \quad (6.56)$$

Esta medida tiene los inconvenientes de que no es fácilmente calculable y que alcanza la cota superior 1 en “demasiadas ocasiones”, lo que justifica la relajación de los axiomas.

Un problema que aparecía con las medidas de concordancia es que sólo aportaban condiciones suficientes para la independencia y la dependencia perfecta (tanto comonótona

como contramonótona). En el caso particular de la Tau de Kendall y la Rho de Spearman, los Teoremas 6.6 y 6.9 caracterizaban la dependencia perfecta positiva y negativa, pero no la independencia.

Las medidas de dependencia **caracterizan la independencia**, con la consiguiente pérdida de información acerca de la naturaleza de la dependencia (positiva o negativa). Este problema se debe a la **incompatibilidad entre el axioma iv de la Definición 6.7 y el axioma v de la Definición 6.2** (ver [20]). A modo de resumen:

Medidas de concordancia: mínimas/máximas cuando las variables son comonótonas/contramonótonas, con signo, no caracterizan la independencia. τ y ρ caracterizan la dependencia monótona creciente y decreciente. Se comportan *como* r .

Medidas de dependencia: mínimas cuando las variables son independientes y máximas cuando son dependientes monótonas perfectas. Caracterizan la independencia y la dependencia monótona perfecta. Se comportan *como* $|r|$.

El axioma VII muestra la relación de las medidas de dependencia con $|r|$. La relación de las de concordancia con r está dada por el siguiente teorema, con demostración en [70].

Teorema 6.17. *Si la distribución conjunta de X e Y es una normal bivariante con coeficiente de correlación r y κ es una medida de concordancia, entonces $\kappa_{X,Y}$ es una función monótona creciente de r .*

6.2.1. Sigma de Schweizer y Wolff

La medida de dependencia más conocida en el contexto de las cópulas es la Sigma de Schweizer y Wolff. Como se comentaba antes, surge de manera natural al considerar la distancia L^1 entre las superficies de C y Π .

Definición 6.8. Dadas dos variables aleatorias X e Y con cópula asociada C , se define la *Sigma de Schweizer y Wolff* como

$$\sigma = 12 \int_0^1 \int_0^1 |C(u, v) - uv| dudv. \quad (6.57)$$

Con el siguiente teorema se prueba que σ es una medida de dependencia. Se debe a Schweizer y a Wolff y su demostración se encuentra en [73].

Teorema 6.18. *Sean X e Y variables continuas con cópula C . Entonces σ_C es una medida de dependencia con la función ϕ dada por*

$$\phi(|r|) = \frac{6}{\pi} \arcsen \left(\frac{|r|}{2} \right). \quad (6.58)$$

Esta medida se podría generalizar para distancias L^p mediante

$$\left(k_p \int_0^1 \int_0^1 |C(u, v) - uv|^p dudv \right)^{\frac{1}{p}}, \quad k_p = \frac{\Gamma(2p + 3)}{2\Gamma^2(p + 1)}. \quad (6.59)$$

6.3. Dependencia de las colas

Supongamos que X e Y son dos variables aleatorias que miden los beneficios de ciertos activos económicos. Las grandes pérdidas de X e Y (valores extremos inferiores) pueden estar muy correladas, por ejemplo debido a una crisis en algún sector, lo que hace necesario cuantificar esa dependencia a la hora de invertir en ellos. Para medir esta dependencia se definen los coeficientes de dependencia en las colas.

Definición 6.9. Sean X e Y variables aleatorias continuas con funciones de distribución F y G . Se define el *coeficiente de dependencia de la cola superior* como

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P} \{Y > G^{(-1)}(u) | X > F^{(-1)}(u)\}. \quad (6.60)$$

De forma similar, el *coeficiente de dependencia de la cola inferior* se define como

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P} \{Y \leq G^{(-1)}(u) | X \leq F^{(-1)}(u)\}. \quad (6.61)$$

Otra manera equivalente de definir λ_U y λ_L es considerar $U = F(X)$ y $V = G(Y)$ y así:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P} \{V > u | U > u\}, \quad (6.62)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P} \{U \leq u | V \leq u\}. \quad (6.63)$$

En la definición estamos suponiendo que estos límites existen.

Observación 6.5. Los coeficientes λ_U y λ_L pertenecen a $[0, 1]$ y se interpretan como:

- Si $\lambda_U = 0$, entonces X e Y son independientes en la cola superior.
- Si $\lambda_U \in (0, 1]$, entonces X e Y son dependientes en la cola superior.
- Si $\lambda_L = 0$, entonces X e Y son independientes en la cola inferior.
- Si $\lambda_L \in (0, 1]$, entonces X e Y son dependientes en la cola inferior.

◁

Teorema 6.19. Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C , cuya sección diagonal es δ_C . Entonces

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} = 2 - \delta'_C(1^-), \tag{6.64}$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \delta'_C(0^+). \tag{6.65}$$

Demostración. Usando la definición de probabilidad condicional y que U y V son uniformes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{V > u | U > u\} &= \frac{\mathbb{P}\{V > u, U > u\}}{\mathbb{P}\{U > u\}} = \frac{\Phi(u, u)}{1 - u} = \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \\ &= 2 - \frac{1 - C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned}$$

Aplicando el límite a la anterior expresión se obtiene (6.64). Para λ_L es similar, pues para obtener (6.64) sólo hay que aplicar el límite a

$$\mathbb{P}\{V \leq u | U \leq u\} = \frac{\mathbb{P}\{V \leq u, U \leq u\}}{\mathbb{P}\{U \leq u\}} = \frac{C(u, u)}{u}.$$

□

Ejemplo 6.10. La única cópula de W , Π y M que tiene dependencia en las colas es M , como se observa en la Tabla 6.1. ◇

	W	Π	M
λ_U	0	0	1
λ_L	0	0	1

Tabla 6.1: Dependencia en las colas para W , Π y M .

Ejemplo 6.11. Sea $C_\theta(u, v) = \theta M(u, v) + (1 - \theta)\Pi(u, v)$. Esta cópula tiene dependencia en ambas colas. La forma más rápida de hallar λ_U y λ_L es calcular δ'_θ :

$$\delta'_\theta(u) = \theta + 2(1 - \theta)u$$

y así,

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - \delta'_\theta(1^-) = 2 - (\theta + 2 - 2\theta) = \theta, \\ \lambda_L &= \delta'_\theta(0^+) = \theta. \end{aligned}$$

◇

Para cópulas que no tienen una forma cerrada sencilla, las expresiones (6.64) y (6.64) pueden no ser muy útiles. Para solucionar el problema, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.5. *Dada una cópula C ,*

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 + \lim_{u \rightarrow 1^-} \left(\left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial s} \right|_{s=t=u} + \left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial t} \right|_{s=t=u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} (\mathbb{P}\{V > u|U = u\} + \mathbb{P}\{U > u|V = u\}), \end{aligned} \tag{6.66}$$

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 1^+} \left(\left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial s} \right|_{s=t=u} + \left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial t} \right|_{s=t=u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} (\mathbb{P}\{V < u|U = u\} + \mathbb{P}\{U < u|V = u\}). \end{aligned} \tag{6.67}$$

Demostración. Por la regla de la cadena, $\frac{dC(u, u)}{du} = \left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial s} \right|_{s=t=u} + \left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial t} \right|_{s=t=u}$. Por otro lado, vimos en (5.1) cómo se expresaba la distribución condicional de una cópula, con lo cual $\left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial s} \right|_{s=t=u} = \mathbb{P}\{V \leq u|U = u\}$ y $\left. \frac{\partial C(s, t)}{\partial t} \right|_{s=t=u} = \mathbb{P}\{U \leq u|V = u\}$. Basta aplicar estas igualdades y la regla de L'Hôpital en (6.64) y (6.65). \square

Ejemplo 6.12. Con este corolario podemos calcular λ_U y λ_L para la cópula Gaussiana con coeficiente de correlación ρ , $|\rho| < 1$. Como C_ρ^{Ga} es simétrica, la expresiones (6.66) y (6.67) se simplifican a $\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}\{V > u|U = u\}$ y $\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}\{V < u|U = u\}$. Si denotamos $X = \Phi^{-1}(V)$ e $Y = \Phi^{-1}(U)$, $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y además $Y|X = x \sim \mathcal{N}(\rho x, 1 - \rho^2)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}\{V > u|U = u\} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{Y > x|X = x\} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \widehat{\Phi} \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \widehat{\Phi} \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_L &= 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}\{V < u|U = u\} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}\{Y < x|X = x\} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Con lo cual **la cópula Gaussiana es independiente en las colas**, uno de los motivos por lo que no es adecuada para modelizar variables potencialmente dependientes en las colas (por ejemplo, variables de tipo económico). \diamond

Corolario 6.6. *Si C es una cópula Arquimediana con generador φ , entonces*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2\varphi(u))}{1 - u} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2x)}{1 - \varphi^{[-1]}(x)}, \tag{6.68}$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{[-1]}(2\varphi(u))}{u} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(2x)}{\varphi^{[-1]}(x)}. \tag{6.69}$$

Demostración. Las primeras igualdades son triviales por el teorema. Las segundas se obtienen con el cambio de variable $x = \varphi(u)$, con lo cual $u = \varphi^{[-1]}(x)$, $\varphi(1^-) = 0^+$, con inversa $\varphi(0^+) = \infty$. □

Ejemplo 6.13. Sea C_θ la cópula de Gumbel. Su generador era $\varphi_\theta(t) = (-\log t)^\theta$ y $\varphi_\theta^{-1}(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi_\theta^{[-1]}(2x)}{1 - \varphi_\theta^{[-1]}(x)} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \exp\left(- (2x)^{\frac{1}{\theta}}\right)}{1 - \exp\left(-x^{\frac{1}{\theta}}\right)} \\ &\stackrel{L'H\hat{o}pital}{=} 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\exp\left(-x^{\frac{1}{\theta}}\right)\right)^{2^{\frac{1}{\theta}}} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}-1}, \\ \lambda_L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(2x)}{\varphi^{[-1]}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(- (2x)^{\frac{1}{\theta}}\right)}{\exp\left(-x^{\frac{1}{\theta}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(-x^{\frac{1}{\theta}}\right)^{2^{\frac{1}{\theta}-1}} = 0. \end{aligned}$$

◇

Teorema 6.20. Si $\hat{\lambda}_U, \hat{\lambda}_L$ son los parámetros de dependencia de una cópula de supervivencia \hat{C} y λ_U, λ_L los de la cópula C , entonces $\hat{\lambda}_U = \lambda_L$ y $\hat{\lambda}_L = \lambda_U$.

Demostración. Con un sencillo cálculo se comprueba que $\hat{\lambda}_U = \lambda_L$:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_U &= 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \hat{C}(u, u)}{1 - u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{2u - 1 + C(1 - u, 1 - u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(1 - u, 1 - u)}{1 - u} = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{C(v, v)}{v} = \lambda_L. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Como $\hat{\lambda}_U = \lambda_U$, aplicando (6.70) se prueba $\hat{\lambda}_L = \lambda_U$. □

6.4. Cópulas empíricas y medidas de concordancia muestrales

Es bien conocido que la función de distribución empírica de una m.a.s.⁷ X_1, \dots, X_n de la variable X , está dada por

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}. \quad (6.71)$$

Del mismo modo, podemos definir la función de distribución empírica bivalente para una m.a.s. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ del vector (X, Y) ,

$$H_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x, Y_i \leq y\}}. \quad (6.72)$$

Además, H_n tendrá por marginales a $F_n(x) = H_n(x, -\infty) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ y $G_n(y) = H_n(-\infty, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \leq y\}}$.

Entonces, una forma de definir la *cópula empírica* de una m.a.s. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ es utilizar el Corolario 1.2 con H_n , F_n y G_n :

$$C_n(u, v) = H_n(F_n^{(-1)}(u), G_n^{(-1)}(v)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \leq F_n^{(-1)}(u), Y_k \leq G_n^{(-1)}(v)\}} \quad (6.73)$$

El gran problema que surge es que C_n no es única, debido a que el Corolario 1.2 estaba enunciado para subcópulas y a que F_n y G_n nunca son continuas. Por eso Deheuvels [13] propuso una definición alternativa, que genera una función C_n única, pero con el inconveniente de que no es una cópula (su dominio no es \mathbb{I}^2), ni una subcópula (el dominio tampoco contiene al $(0, 0)$).

Ambas definiciones se usan en la literatura, pues según los contextos una es más adecuada que la otra. Por ejemplo, [71] usa la definición (6.73) para trabajar en la convergencia de los estimadores de las medidas de concordancia, mientras que en [8, 18, 59] se prefiere la Definición 6.10.

Definición 6.10. Sea $\{(X_k, Y_k)\}_{k=1}^n$ una muestra de tamaño n de una distribución continua bivalente. La *cópula empírica* asociada a esta muestra es la función C_n dada por

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\#\{(x, y) \in \{(X_k, Y_k)\}_{k=1}^n \mid x \leq X_{(i)}, y \leq Y_{(j)}\}}{n}, \quad (6.74)$$

donde $X_{(i)}$ e $Y_{(j)}$, $1 \leq i, j \leq n$ denotan los estadísticos ordenados de la muestra. El dominio de esta función es la rejilla $\mathcal{R} = \left\{\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) : 1 \leq i, j \leq n\right\}$.

⁷Muestra aleatoria simple.

Se define la *frecuencia de la cópula empírica* c_n como

$$c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } (X_{(i)}, Y_{(j)}) \in M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.75)$$

Observación 6.6. La cópula empírica C_n es en realidad la subcópula C'_n de (6.73) restringida a la rejilla \mathcal{R} , pues las expresiones (6.73) y (6.74) son equivalentes en \mathcal{R} . \triangleleft

La frecuencia empírica c_n jugará el papel de la densidad de Radon–Nikodym (función de masa de probabilidad) para la cópula empírica C_n [59].

Teorema 6.21. *Las relaciones entre la cópula empírica C_n y su frecuencia c_n son:*

$$C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right), \quad (6.76)$$

$$c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \right) + C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right). \quad (6.77)$$

Dada la muestra $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$, las **medidas muestrales** de la Rho de Spearman, la Tau de Kendall y la Gamma de Gini se pueden expresar a través de la cópula empírica mediante el Teorema 6.22. La demostración del teorema, un poco larga para exponerla aquí, se encuentra en [59].

Si c denota el número de pares concordantes⁸ en la muestra y d el número de discordantes, la Tau de Kendall muestral se define como la diferencia entre c y d partida por el total de pares:

$$t = \frac{c - d}{\binom{n}{2}} = \frac{2(c - d)}{n^2 - n}. \quad (6.78)$$

Para una observación (x_i, y_i) , los rangos p_i y q_i se definen como los índices tales que $(x_i, y_i) = (x_{(p_i)}, y_{(q_i)})$. Así, la Rho de Spearman muestral se define como un promedio de la diferencia cuadrática de rangos:

$$r = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2. \quad (6.79)$$

Otra forma equivalente de definir r , y que es más útil para expresarla en función de C_n ,

⁸ (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ y son discordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

es

$$r = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} kR_k - \frac{n(n+1)^2}{4} \right], \quad (6.80)$$

donde R_k es el índice de la muestra ordenada de Y que hace que $(x_{(k)}, y_{(R_k)})$ esté en la muestra.

En cuanto a la Gamma de Gini muestral, ésta se define como

$$g = \frac{1}{\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor} \left[\sum_{i=1}^n |p_i + q_i - n - 1| - \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \right]. \quad (6.81)$$

Teorema 6.22. Sean C_n y c_n la cópula empírica y la función de frecuencia de la cópula empírica para la muestra $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. Si r , t y g son las versiones muestrales de la Rho de Spearman, la Tau de Kendall y la Gamma de Gini, entonces:

$$t = \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \left[C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right) - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \right) C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n} \right) \right], \quad (6.82)$$

$$r = \frac{12}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \right], \quad (6.83)$$

$$g = \frac{2n}{\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} C_n \left(\frac{i}{n}, 1 - \frac{i}{n} \right) - \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{n} - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} \right) \right] \right\}. \quad (6.84)$$

También se pueden definir las versiones muestrales de los coeficientes de dependencia de la colas, denotados por $\widehat{\lambda}_U$ y $\widehat{\lambda}_L$ ⁹, a través de la cópula empírica [18]:

$$\widehat{\lambda}_U = 2 - \lim_{t \rightarrow n} \frac{1 - C_n \left(\frac{t}{n}, \frac{t}{n} \right)}{1 - \frac{t}{n}}, \quad (6.85)$$

$$\widehat{\lambda}_L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C_n \left(\frac{t}{n}, \frac{t}{n} \right)}{\frac{t}{n}}. \quad (6.86)$$

⁹Aquí $\widehat{\lambda}$ denota estimación y no el coeficiente de dependencia de las colas para una cópula de supervivencia.

6.5. Dependencia de cuadrantes y monotonía de cópulas

Cuando dos variables aleatorias X e Y son independientes estocásticamente, su distribución conjunta se factoriza en las marginales: $\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq x\} \mathbb{P}\{Y \leq y\}$. A partir de esta situación, podemos definir un nuevo tipo de dependencia.

Definición 6.11. Sean X e Y dos variables aleatorias. Se dice que X e Y son *dependientes positivas en cuadrante*¹⁰ (PQD) si para todo (x, y) en \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} \geq \mathbb{P}\{X \leq x\} \mathbb{P}\{Y \leq y\}. \quad (6.87)$$

Análogamente, X e Y son *dependientes negativas en cuadrante* (NQD) si para todo (x, y) en \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} \leq \mathbb{P}\{X \leq x\} \mathbb{P}\{Y \leq y\}. \quad (6.88)$$

De esta forma X e Y son PQD si la probabilidad de que sean simultáneamente grandes (o pequeñas) es como mínimo mayor que esta probabilidad cuando X e Y son independientes. En esta definición, entran variables que tienen una dependencia muy débil o son independientes hasta variables comonótonas (para PQD) o contramonótonas (para NQD).

Por aplicación directa del Teorema de Sklar, se puede caracterizar la dependencia positiva y negativa en cuadrante a través de las cópulas.

Teorema 6.23. *Si X e Y son variables aleatorias continuas, con cópula C , entonces:*

$$X \text{ e } Y \text{ son PQD} \Leftrightarrow C_{XY} \succ \Pi, \quad (6.89)$$

$$X \text{ e } Y \text{ son NQD} \Leftrightarrow C_{XY} \prec \Pi. \quad (6.90)$$

Como es de esperar, si dos variables son PQD, sus medidas de concordancia serán no negativas, pues hay una dependencia positiva.

Teorema 6.24. *Sean X e Y son variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si X e Y son PQD, entonces*

$$3\tau_{X,Y} \geq \rho_{X,Y} \geq 0, \gamma_{X,Y} \geq 0 \text{ y } \beta_{X,Y} \geq 0. \quad (6.91)$$

Si X e Y son NQD, entonces

$$3\tau_{X,Y} \leq \rho_{X,Y} \leq 0, \gamma_{X,Y} \leq 0 \text{ y } \beta_{X,Y} \leq 0. \quad (6.92)$$

¹⁰En inglés, “positively quadrant dependent” y “negatively quadrant dependent”.

Demostración. Lo probaremos para (6.91), pues (6.92) es análogo. Como $C \succ \Pi$, por la monotonía de Q , $Q(C, C) \geq Q(C, \Pi) \geq Q(\Pi, \Pi) = 0$, con lo que $3\tau_C \geq \rho_C \geq 0$. De forma similar,

$$\gamma_C = Q(C, M) + Q(C, W) \geq Q(\Pi, M) + Q(\Pi, W) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Por último, $\beta_C = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1 \geq 4\frac{1}{4} - 1 = 0$. \square

La expresión (6.87) para la PQD puede ser reescrita en términos de probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}\{Y \leq y | X \leq x\} = \frac{\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}}{\mathbb{P}\{X \leq x\}} \geq \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{Y \leq y | X \leq \infty\}. \quad (6.93)$$

Una condición más fuerte sería exigir que para cada $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\{Y \leq y | X \leq x\}$ fuese **una función no creciente de x** . Por ejemplo, si X e Y son dos variables que miden el tiempo de vida de dos componentes y verifican la nueva condición, entonces la probabilidad de que Y tenga un tiempo de vida corto decrece a medida que aumenta el tiempo de vida de X . Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.12. Sean X e Y dos variables aleatorias.

- I. Y es *decreciente en la cola izquierda* en X , denotado por $LTD(Y|X)$ si $\mathbb{P}\{Y \leq y | X \leq x\}$ es una función no creciente de x para todo y .
- II. Y es *creciente en la cola derecha* en X , denotado por $RTI(Y|X)$ si $\mathbb{P}\{Y > y | X > x\}$ es una función no decreciente de x para todo y .

Observación 6.7. En la Definición 6.12, sólo se han tratado las extensiones de la PQD, pero también están las de la NQD:

- I. Y es *creciente en la cola izquierda* en X , denotado por $LTI(Y|X)$ si $\mathbb{P}\{Y \leq y | X \leq x\}$ es una función no decreciente de x para todo y .
- II. Y es *decreciente en la cola derecha* en X , denotado por $RTD(Y|X)$ si $\mathbb{P}\{Y > y | X > x\}$ es una función no creciente de x para todo y .

Los siguientes resultados se exponen sólo para LTD y RTI , pues para LTI y RTD son análogos. \triangleleft

Teorema 6.25. Si $LTD(X|Y)$ o $RTI(Y|X)$, entonces X e Y son PQD.

Demostración. Es obvio que si $LTD(X|Y)$, entonces $PQD(X, Y)$, por (6.93).

Para $RTI(X|Y)$ es similar, debido a la equivalencia entre las condiciones $\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} \geq \mathbb{P}\{X \leq x\}\mathbb{P}\{Y \leq y\}$ y $\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} \geq \mathbb{P}\{X > x\}\mathbb{P}\{Y > y\}$. \square

La caracterización de las propiedades LTD y RTI a través de cópulas se establece con el siguiente teorema.

Teorema 6.26. Sean X e Y son variables aleatorias continuas con cópula C . Entonces:

- I. LTD($Y|X$) si y sólo si para todo v en \mathbb{I} , $\frac{C(u,v)}{u}$ es no decreciente en u .
- II. RTI($X|Y$) si y sólo si para todo v en \mathbb{I} , $\frac{v-C(u,v)}{1-u}$ es no decreciente en u .

Demostración. Sean F y G las distribuciones de X e Y . Si $U = F(X)$ y $V = G(Y)$, como F y G son no decrecientes,

$$\mathbb{P}\{Y \leq y|X \leq x\} = \mathbb{P}\{V \leq v|U \leq u\} = \frac{\mathbb{P}\{U \leq u, V \leq v\}}{\mathbb{P}\{U \leq u\}} = \frac{C(u, v)}{u},$$

de donde se sigue I. Análogamente, RTI($X|Y$) si

$$\mathbb{P}\{Y > y|X > x\} = \mathbb{P}\{V > v|U > u\} = \frac{\mathcal{C}(u, v)}{1-u} = \frac{1-u-v+C(u, v)}{1-u}$$

es no decreciente en u , lo cual equivale a que $\frac{v-C(u,v)}{1-u}$ sea no creciente en u . □

A menudo, las condiciones del Teorema 6.26 son difíciles de evaluar y resulta más práctico este corolario.

Corolario 6.7. Sean X e Y variables aleatorias continuas con cópula C . Entonces:

- I. LTD($Y|X$) si y sólo si para todo v en \mathbb{I} , $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{C(u,v)}{u}$ para casi todo u .
- II. RTI($X|Y$) si y sólo si para todo v en \mathbb{I} , $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \geq \frac{v-C(u,v)}{1-u}$ para casi todo u .

Demostración. Usando el Teorema 1.4, las nuevas condiciones se deducen de que para todo v y casi todo u , $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{C(u,v)}{u} \right) \leq 0$ y $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v-C(u,v)}{1-u} \right) \leq 0$. □

El Teorema 6.24 puede ser mejorado en la desigualdad de τ y ρ , mediante el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en [59].

Teorema 6.27. Sean X e Y variables aleatorias continuas. Si LTD($Y|X$) y RTI($Y|X$), entonces $\rho_{X,Y} \geq \tau_{X,Y} \geq 0$. Si LTI($Y|X$) y RTD($Y|X$), entonces $\rho_{X,Y} \leq \tau_{X,Y} \leq 0$.

6.6. Dependencia multivariante

Las medidas de concordancia vistas anteriormente (así como la Sigma de Schweizer y Wolff) se pueden extender de forma natural a una dimensión superior n , simplemente estableciendo medidas en pares en una matriz $n \times n$, tal y como se hace con la correlación lineal.

También es posible una extensión a una medida de dependencia real n -variante. En concreto, Nelsen [57] prueba una versión análoga al Teorema 6.2 para cópulas n -variantes, que proporciona una función Q_n análoga a Q . Con esta función, las versiones multivariantes de la Tau de Kendall y la Rho de Spearman son

$$\tau_{n,C} = Q_n(C, C) \text{ y } \rho_{n,C} = \frac{(n+1)(2^{n-1}-1)}{2^n - (n+1)} Q_n(C, \Pi^n). \tag{6.94}$$

Es decir:

$$\tau_{n,C} = \frac{1}{2^{n-1}-1} \left[2^n \int_{\mathbb{I}^n} C(u_1, \dots, u_n) dC(u_1, \dots, u_n) - 1 \right], \tag{6.95}$$

$$\rho_{n,C} = \frac{n+1}{2^n - (n+1)} \left[2^n \left(\int_{\mathbb{I}^n} C(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n + \int_{\mathbb{I}^n} \Pi^n(u_1, \dots, u_n) dC(u_1, \dots, u_n) \right) - 1 \right]. \tag{6.96}$$

En cuanto a la Beta de Blomqvist, Nelsen [57] propone la siguiente extensión:

$$\beta_{n,C} = \frac{1}{2^{n-1}-1} \left[2^n C \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) - 1 \right]. \tag{6.97}$$

Conviene recordar que, tal y como suele suceder al extender conceptos a dimensiones superiores, las extensiones de estas medidas no son únicas. Por ejemplo, en [71] se propone la siguiente extensión de la beta de Blomqvist:

$$\beta_{n,C} = \frac{1}{2^{n-1}-1} \left[2^n \left(C \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) + \widehat{C} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \right) - 1 \right]. \tag{6.98}$$

La extensión de la Gamma de Gini es más complicada, debido a que W^n no es una cópula para $n \geq 3$. Recordemos que γ_C ponderaba la distancia de C a M y W . Tratar de extender esta medida a n -cópulas como la distancia de la n -cópula C a M^n y W^n no tiene sentido: W^n no es una copula y, lo que es más importante, ya no juega el papel simétrico de M^n con respecto a Π^n , pues la distancia de W^n a Π^n es menor. Esto se puede comprobar

viendo el n -volumen comprendido entre M^n y Π^n , denotado por a_n y entre W^n y Π^n , denotado por b_n :

$$a_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 [M^n(u_1, \dots, u_n) - \Pi^n(u_1, \dots, u_n)] du_1 \cdots du_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^n},$$

$$b_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 [\Pi^n(u_1, \dots, u_n) - W^n(u_1, \dots, u_n)] du_1 \cdots du_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ y por tanto una media entre las distancias de C a M^n y a W^n va a estar sesgada hacia W^n . Una extensión válida de la Gamma de Gini, que soluciona este problema, se puede ver en [71].

La Sigma de Schweizer y Wolff, gracias a medir el n -volumen (sin signo) entre C y Π^n no presenta los problemas de la Gamma de Gini y se puede generalizar fácilmente:

$$\sigma_{n,C} = \frac{2^n(n+1)}{2^n - (n+1)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |C(u_1, \dots, u_n) - u_1 \cdots u_n| du_1 \cdots du_n. \tag{6.99}$$

Finalizamos la sección con la extensión multivariante de dependencia en cuadrante: la dependencia en ortante.

Definición 6.13. Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio n -dimensional.

- I. X es *dependiente positivo en el ortante inferior*¹¹ (PLOD) si para todo $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{P}\{X \leq x\} \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i \leq x_i\}. \tag{6.100}$$

- II. X es *dependiente positivo en el ortante superior* (PUOD) si para todo $x = (x_1, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{P}\{X > x\} \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i > x_i\}. \tag{6.101}$$

- III. X es *dependiente positiva en ortante* (POD) si para todo x en \mathbb{R}^n se verifican (6.100) y (6.101).

De forma análoga, se puede definir la *dependencia negativa en el ortante superior* (NLOD), la *dependencia negativa en el ortante inferior* (NUOD) y la *dependencia negativa en ortante* (NOD).

¹¹En ingles, “positively lower orthant dependent” y “positively upper orthant dependent”.

Observación 6.8. En el caso $n = 2$ PLOD y PUOD equivalen (ver demostración del Teorema 6.25). \triangleleft

Teorema 6.28. *Si X es un vector aleatorio con marginales continuas y n -cópula C , entonces*

$$X \text{ es PLOD} \Leftrightarrow C \prec \Pi^n \text{ y } X \text{ es PUOD} \Leftrightarrow \mathcal{C} \prec \mathbb{I}^n \quad (6.102)$$

siendo $\mathbb{I}^n(u_1, \dots, u_n) = (1 - u_1) \cdots (1 - u_n)$.

Demostración. Lo único que hay que probar es la forma de \mathbb{I}^n , y se puede ver usando (2.33) y expandiendo $\prod_{i=1}^n (1 - u_i)$ de forma combinatoria. \square

Capítulo 7

Aplicaciones

7.1. Aplicación a la regresión cuantil

Dadas dos variables X e Y , la curva de regresión $y = \tilde{y}(x) = \mathbb{E}[Y|X = x]$ establece el valor esperado de Y (su media) para cada valor de X . Cuando se estima esta curva, es habitual considerar distintas estructuras para $\tilde{y}(x)$, dando lugar a distintos modelos de regresión: lineales, polinómicos, logísticos, lineales generalizados, ... Estos modelos están determinados por ciertos coeficientes que se han de estimar.

Otra alternativa a usar la media para establecer el valor esperado de Y es utilizar la mediana, o de forma más general, el p -cuantil de Y dada $X = x$.

Definición 7.1. Sean X e Y dos variables aleatorias y $p \in (0, 1)$. Para x en $\text{Ran}X$, sea $y = \tilde{y}(x)$ la solución de la ecuación $\mathbb{P}\{Y \leq y|X = x\} = p$. Entonces la curva $y = \tilde{y}_p(x)$ es la *curva de regresión p -cuantil de Y sobre X* . Para el caso en el que $p = \frac{1}{2}$, el cuantil es la mediana e $y = \tilde{y}_p(x)$ es la *curva de regresión en mediana de Y sobre X* .

Según esta definición, una observación (x, y) de (X, Y) tiene probabilidad p de estar por *debajo* de la gráfica de $y = \tilde{y}_p(x)$. La regresión cuantil tiene ciertas ventajas sobre la regresión en media: es más robusta frente a datos atípicos y permite un ajuste del grado de predicción mediante la elección del cuantil p . Para un estudio más detallado sobre este tema, ver [42].

Las cópulas guardan una relación especial con las curvas de regresión cuantil. Esta relación no es extraña: una cópula es la distribución conjunta de los cuantiles de dos variables aleatorias. Supongamos que X e Y son dos v.a. continuas con cópula C y marginales F y G . En ese caso, $U = F(X)$ y $V = G(Y)$ son variables uniformes con distribución conjunta C . Como consecuencia de (5.1),

$$\mathbb{P}\{Y \leq y|X = x\} = \mathbb{P}\{V \leq G(y)|U = F(x)\} = \left. \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \right|_{\substack{u=F(x) \\ v=G(y)}}. \quad (7.1)$$

Con esto podemos dar el siguiente algoritmo para el cálculo de la curva de regresión p -cuantil:

Algoritmo 7.1. Sean X e Y v.a. continuas, con cópula C y marginales F y G . Para hallar la curva de regresión p -cuantil $y = \tilde{y}(x)$ de Y sobre X :

- I. Establecer $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = p$.
- II. Resolver para la curva de regresión $v = \tilde{v}(u)$ de U sobre V .
- III. Reemplazar $u = F(x)$ y $v = G(y)$, con lo que tenemos

$$y = \tilde{y}_p(x) = G^{-1} [\tilde{v}_p(F(x))]. \tag{7.2}$$

En el caso de que la cópula C sea Arquimediana con generador φ , v se despeja fácilmente de la ecuación $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = p$, resultando

$$v = \varphi^{[-1]} \left\{ \varphi \left[(\varphi')^{-1} \left(\frac{\varphi'(u)}{p} \right) \right] - \varphi(u) \right\}. \tag{7.3}$$

Veamos un ejemplo de la aplicación de este algoritmo.

Ejemplo 7.1. Si U y V son uniformes cuya distribución conjunta es la cópula de Plackett C_θ , θ en $[0, \infty]$, entonces

$$\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial u} = \frac{\theta v + (1 - \theta)C(u,v)}{1 + (\theta - 1)[u + v - 2C(u,v)]}. \tag{7.4}$$

$v = \tilde{v}_p(u)$ admite una expresión sencilla cuando $p = \frac{1}{2}$, es decir en la regresión en mediana:

$$v = \tilde{v}_{\frac{1}{2}}(u) = \frac{1}{\theta + 1} + \frac{\theta - 1}{\theta + 1}u. \tag{7.5}$$

La curva de regresión de V en U resulta ser la línea que une $(0, \frac{1}{\theta+1})$ y $(1, \frac{\theta}{\theta+1})$. Es interesante ver las líneas de regresión para los casos especiales $C_0 = W$, $C_1 = \Pi$ y $C_\infty = M$: contramonotonía ($v = 1 - u$), independencia ($v = \frac{1}{2}$) y comonotonía ($v = u$), respectivamente.

Si X e Y son v.a. continuas con cópula C_θ y marginales F y G , entonces la curva de regresión en mediana es

$$y = \tilde{y}_{\frac{1}{2}}(x) = G^{-1} \left(\frac{1}{\theta + 1} + \frac{\theta - 1}{\theta + 1}F(x) \right). \tag{7.6}$$

En la Figura 7.1 podemos ver la recta de regresión en mediana para la cópula de Plackett con $\theta = 0.1$, la curva de regresión en mediana para la distribución con marginales $\mathcal{N}(3, 1)$

y $\mathcal{N}(0, 5)$ y una muestra con 500 puntos. La muestra se expone para apreciar que aproximadamente la mitad de ella está por debajo de la recta/curva de regresión en mediana.

◇

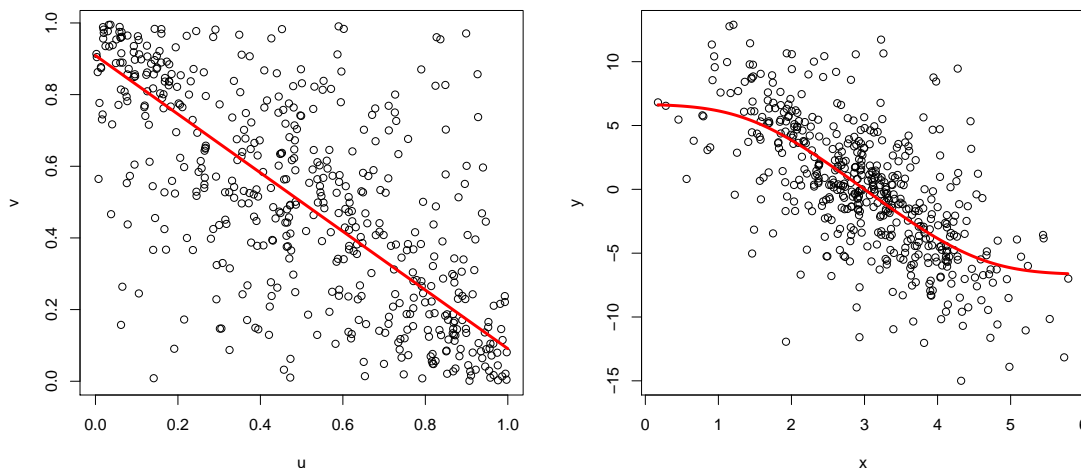


Figura 7.1: Regresión en mediana para la cópula de Plackett con $\theta = 3$ y para la distribución con marginales $\mathcal{N}(3, 1)$ y $\mathcal{N}(0, 5)$.

Hasta ahora hemos visto las curvas de regresión cuantil *teóricas*, dejando de lado su estimación cuando la distribución conjunta de las variables es desconocida. Al igual que con la regresión en media, a la hora de la estimación se suelen considerar distintas estructuras para la función $y = \tilde{y}_p(x)$, obteniendo modelos paramétricos. Sin embargo, aquí haremos un tratamiento *no paramétrico* de la regresión cuantil, sin suponer ninguna estructura particular de $y = \tilde{y}_p(x)$ y haciendo uso de las cópulas.

Supongamos que tenemos dos v.a. continuas X e Y , con marginales desconocidas y **cópula C conocida**. En la siguiente sección veremos un método para estimar cópulas Arquimedianas a partir de la muestra, con lo que podemos suponer que ya tenemos una cópula C modelando la dependencia entre las variables. Si $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ es una muestra de (X, Y) , podemos estimar las curvas de regresión p -cuantil sustituyendo F y G en la ecuación (7.2) por sus estimaciones \hat{F} y \hat{G} :

$$y = \tilde{y}_p(x) = \hat{G}^{(-1)} \left[\tilde{v}_p(\hat{F}(x)) \right]. \tag{7.7}$$

Las estimaciones de F y G se pueden obtener por máxima verosimilitud si son paramétricas o por una estimación tipo núcleo. De momento, consideraremos la estimación de las marginales por las distribuciones empíricas F_n y G_n , que también son no paramétricas. En la siguiente sección aplicaremos la estimación núcleo para suavizar las curvas cuantiles

estimadas de un conjunto de datos.

En los dos siguientes ejemplos simularemos una estimación de las curvas de los p -cuantiles con $p = 0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.95$ para dos distribuciones con cópula conocida y marginales desconocidas. Los códigos de su implementación están el Apéndice C.

Ejemplo 7.2. Supongamos que la cópula de X e Y es la cópula Gaussiana $C_\rho^{Ga}(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$. Si $x = \Phi^{-1}(u)$ e $y = \Phi^{-1}(v)$, la derivada parcial de C_ρ^{Ga} con respecto a u es

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\rho^{Ga}(u, v)}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} \Phi_\rho(x, y)}{\Phi'(x)} = \frac{\int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(t^2-2\rho tx+x^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dt}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = \Phi\left(\frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \rho\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = p. \end{aligned}$$

Despejando v , resulta

$$v = \tilde{v}_p(u) = \Phi\left(\rho\Phi^{-1}(u) + \sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(p)\right). \tag{7.8}$$

Si consideramos el vector aleatorio $(X, Y) \sim C_\rho^{Ga}(F, G)$, con marginales¹ $F \stackrel{d}{=} \text{We}(3, 2)$ y $G \stackrel{d}{=} \text{We}(5, 5)$, la curva del p -cuantil es

$$y = \tilde{y}_p(x) = G^{-1}\left(\Phi\left(\rho\Phi^{-1}(F(x)) + \sqrt{1 - \rho^2}\Phi^{-1}(p)\right)\right). \tag{7.9}$$

La estimación de estas curvas se obtiene reemplazando F^{-1} por $F_n^{(-1)}$ y G por G_n . En la Figura 7.2 se muestran dos gráficos con 500 simulaciones para la cópula Gaussiana con $\rho = 0.8$ y para la distribución $C_\rho^{Ga}(F, G)$. Los gráficos muestran las curvas reales de los p -cuantiles (en rojo) y, para la distribución $C_\rho^{Ga}(F, G)$, la estimación realizada en base a la muestra de las curvas de los p -cuantiles (en azul). Conviene recordar que las curvas están ordenadas de menor a mayor según su cuantil.

Como se puede ver, la aproximación es bastante buena salvo en los extremos inferior y superior. Además dicha aproximación va a ser mejor en los cuantiles centrales. \diamond

Ejemplo 7.3. Vamos a repetir el ejemplo anterior con la cópula de Frank. En el Capítulo 5 habíamos calculado su distribución condicional y se había despejado, de forma que con sustituir v_2, u_1 y u_2 por p, u y v en (5.18) y reordenar el resultado tenemos:

$$v = \tilde{v}_p(u) = -\frac{1}{\theta} \log\left(1 - (1 - e^{-\theta}) [1 + e^{-\theta u}(p^{-1} - 1)]^{-1}\right) \tag{7.10}$$

¹ $\text{We}(\lambda, k) \sim 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$.

Ahora consideramos una distribución con marginales $\Gamma(5, 4)^2$ y $t_2(3, 10)$. La Figura 7.3 recoge las curvas de los p -cuantiles reales y estimados (en base a los 500 puntos simulados) con la cópula de Frank de parámetro $\theta = 3$. \diamond

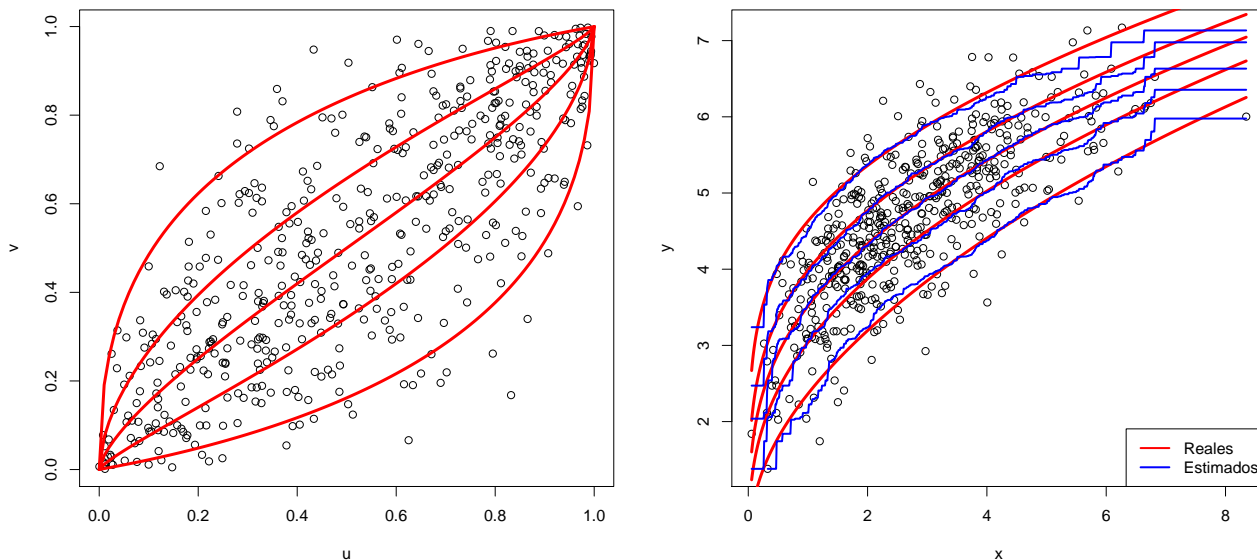


Figura 7.2: Curvas de regresión p -cuantil para la cópula Gaussiana con $\rho = 0.8$ y para la distribución $C_\rho^{Ga}(\text{We}(3, 2), \text{We}(5, 5))$.

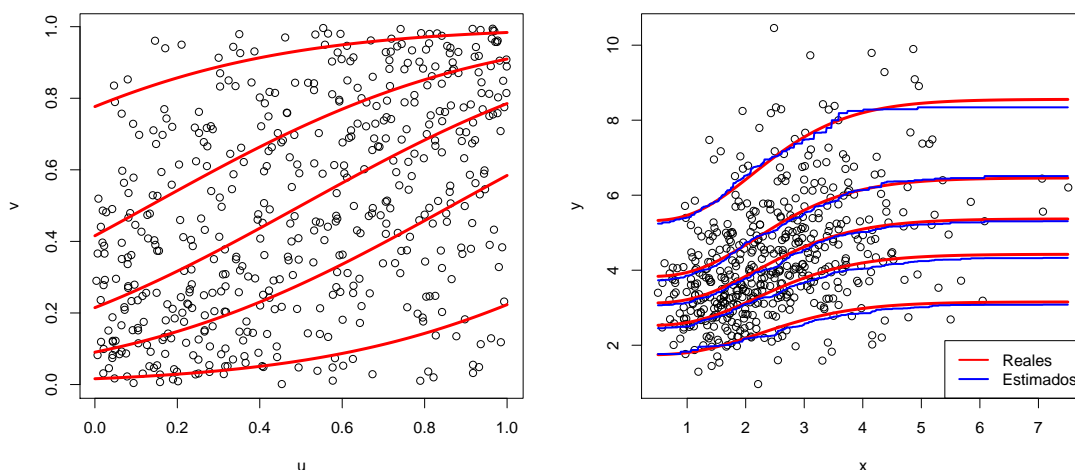


Figura 7.3: Curvas de regresión p -cuantil para la cópula de Frank con $\theta = 3$ y para la distribución $C_\theta(\Gamma(5, 4), t_2(3, 10))$.

$${}^2\Gamma(a, p) \sim \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}.$$

Para finalizar, comentar que la regresión en mediana se explica mucho mejor en términos de cópulas que la regresión en media, debido a la relación que tienen las cópulas con los cuantiles. Con respecto a la regresión en mediana, Roel Braekers e Ingrid Van Keilegom [6] proponen considerar el modelo de regresión $Y = \text{med}(Y|X) + \varepsilon$, donde ε y X **no se suponen independientes**, a diferencia de lo que es habitual. En su lugar, se supone que la dependencia entre ε y X está dada mediante una cópula C_θ , de modo que $(\varepsilon, X) \sim C_\theta(F_\varepsilon(\cdot), F_X(\cdot))$. Esto permite un modelo de regresión en mediana mucho más flexible que el modelo clásico.

7.2. Método de Genest y Rivest para la estimación de cópulas Arquimedianas mediante la Tau de Kendall

Genest y Rivest [32] introdujeron en 1993 un método no paramétrico para la estimación de la cópula Arquimediana de un conjunto de datos. Es sencillo de implementar y se basa en la Tau de Kendall y la distribución de Kendall (Secciones 6.1.1 y 4.2). Este método también se recoge en [8, 27], explicado de una forma más clara.

En esta sección desarrollamos el método de Genest y Rivest con todo detalle y, tal y como se hace en su artículo, lo implementamos para estimar la cópula Arquimediana de un conjunto de datos sobre elementos químicos en el agua. Conviene destacar que lo que hacemos es distinto al artículo: consideramos otro tipo de variables (escandio y cobalto, en vez de uranio y cesio), usamos las 22 cópulas de Nelsen para estimar la mejor (Genest y Rivest lo hacen con las cópulas Clayton, Frank, Gumbel y Log-cópula) y añadimos la regresión cuantil.

Empecemos recordando algunos resultados ya vistos.

La Tau de Kendall de una cópula C tiene una interpretación interesante como una transformación de la esperanza de $C(U, V)$: $\tau = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1$. En el caso en que C_φ sea una cópula Arquimediana con generador φ , la distribución de $C_\varphi(U, V)$ es la distribución de Kendall, $K_\varphi(z) = z - \lambda(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}$. En la Sección 4.2 se veía que K caracterizaba completamente φ y por tanto a la cópula Arquimediana C_φ . Además, si (X, Y) es un vector aleatorio con cópula C_φ y marginales **continuas** F y G , lo que denotaremos por $(X, Y) \sim H = C_\varphi(F, G)$, K es la distribución de $H(X, Y)$:

$$H(X, Y) = C_\varphi(F(X), F(Y)) \stackrel{d}{=} C_\varphi(U, V) \sim K. \quad (7.11)$$

Simplemente hay que tener en cuenta el Teorema de Sklar y la transformación de probabilidad $X \sim F \Rightarrow F(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Dada una muestra $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ de $(X, Y) \sim C_\varphi(F, G)$, podemos usar (7.11) para crear un estimador no paramétrico de K a través de la distribución empírica de $Z = H(X, Y)$:

$$K_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i \leq z\}}, \quad Z_i = H(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n. \tag{7.12}$$

El problema es que al ser H desconocida, también lo son las Z_i . Una solución es considerar $Z_i = \widehat{Z}_i$, con \widehat{Z}_i la estimación mediante la distribución empírica de H , H_n . Entonces:

$$Z_i = H_n(X_i, Y_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i\}}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7.13}$$

Sin embargo, como $H_n(X_i, Y_i)$ es siempre mayor que $\frac{1}{n}$ y es deseable tener un estimador tomando valores en $(0, 1)$, en (7.13) dividimos por $n - 1$ en vez de por n . Así resulta:

$$Z_i = \frac{n}{n-1} H_n(X_i, Y_i) = \frac{\#\{(X_j, Y_j) : X_j < X_i, Y_j < Y_i\}}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7.14}$$

Usando (7.11) y (7.14) tenemos un estimador no paramétrico de K perfectamente aplicable. La siguiente proposición [32] muestra que K_n es un estimador consistente de K .

Proposición 7.1. *Si C es una cópula absolutamente continua y $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ una muestra aleatoria de $C(F, G)$. Bajo condiciones típicas de regularidad para la convergencia débil en distribución, la distribución de Z_i converge a $K(z) = \mathbb{P}\{C(F(X), F(Y)) \leq z\}$, y la distribución empírica $K_n(z)$ de los Z_i 's definida en (7.12) es un estimador de $K(z)$ \sqrt{n} -consistente.*

En teoría, con este estimador, podemos estimar el generador φ de la cópula de una forma no paramétrica. Basta tener en cuenta que $K_n(t) = z - \lambda_n(t)$ y la caracterización de un generador por λ vista en la Proposición 4.1:

$$\varphi_n(u) = \exp \left\{ \int_{u_0}^u \frac{1}{\lambda_n(t)} dt \right\}, \quad 0 < u_0 < 1 \text{ constante.} \tag{7.15}$$

Este procedimiento es válido siempre que se cumpla $K_n(u^-) > u, \forall u : 0 < u < 1$, es decir, que λ_n sea negativa y acotada. Así, C_{φ_n} es una estimación no paramétrica de la cópula Arquimediana original.

Sin embargo, puede ser más interesante usar K_n como una regla para escoger a la mejor familia paramétrica de cópulas Arquimedianas que ajuste los datos. De esta forma, podemos ajustar varias familias paramétricas C_α mediante la estimación $\widehat{\alpha}$ de su

parámetro y elegir la que *mejor ajuste los datos* usando un criterio de proximidad entre $K_{\hat{\alpha}}(z) = z - \frac{\varphi_{\hat{\alpha}}(z)}{\varphi'_{\hat{\alpha}}(z)}$ y K_n . Esta *proximidad* se puede medir mediante las normas L^2 , L^1 o L^∞ , por ejemplo. Es interesante disponer de una buena batería de cópulas Arquimedianas paramétricas, que cubran distintos tipos de dependencia, para poder elegir entre ellas la que mejor nos ajuste los datos. En el estudio de los datos, usaremos las 22 cópulas Arquimedianas que recoge Nelsen [59]. Sus propiedades se pueden ver en el catálogo del Capítulo 8 y en [2].

Queda pendiente la estimación de los parámetros. Esta estimación se hace mediante el **método de los momentos**. La versión muestral de la Tau de Kendall viene dada por $\tau_n = \frac{c-d}{\binom{n}{2}} = \frac{2(c-d)}{n(n-1)}$, donde c es el número de pares concordantes de la muestra y d el de discordantes. Si definimos

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & X_j < X_i, Y_j < Y_i \\ 0, & \text{resto} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n \tag{7.16}$$

tenemos que las observaciones i y j son concordantes si y sólo si $I_{ij} + I_{ji} = 1$ (al suponer las marginales continuas podemos eliminar los casos de igualdad). Como $Z_i = \frac{\sum_j I_{ij}}{n-1}$, $c = \sum_{i,j} I_{ij} = (n-1) \sum_i Z_i$ y por tanto:

$$\tau_n = \frac{2(c-d)}{n(n-1)} = \frac{2(2(n-1) \sum_i Z_i - n(n-1))}{n(n-1)} = 4\bar{Z} - 1. \tag{7.17}$$

Entonces (7.17) es la versión muestral de $\tau = 4\mathbb{E}[Z] - 1$, con $Z = C(U, V)$ y tiene sentido establecer $\tau_\alpha = \tau_n$ para obtener el estimador $\hat{\alpha}$ de α . Esto se hace despejando α en la expresión de la τ , si disponemos de una expresión cerrada para τ (consultar el catálogo en el Capítulo 8), o mediante un procedimiento numérico, fácil de implementar con el paquete `fCopulae` [82] para las 22 cópulas de Nelsen. En el caso en que tengamos más de un parámetro, habría que calcular los momentos teóricos necesarios de Z y aproximarlos por los muestrales para obtener las estimaciones correspondientes de los parámetros. Con esto ya podríamos ajustar las cópulas Arquimedianas paramétricas, para luego elegir la mejor.

La siguiente proposición muestra la convergencia en distribución normal de τ a τ_n . Es consecuencia de que $\tau_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)]$ es un un U -estadístico (con $h((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{sign}((x_1 - x_2)(y_1 - y_2))$) y de que la distribución de los U -estadísticos es asintóticamente normal.

Proposición 7.2. Sean $Z_i = \frac{\#\{(X_j, Y_j): X_j < X_i, Y_j < Y_i\}}{n-1}$ y $W_i = \frac{\#\{(X_j, Y_j): X_i < X_j, Y_i < Y_j\}}{n-1}$. Si $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i + W_i - 2\bar{W})^2}{n-1}$, entonces $\frac{\sqrt{n}(\tau_n - \tau)}{4S} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

Gracias a esta proposición, podemos aplicar el **método delta** para obtener intervalos

de confianza y la varianza de los estimadores $\hat{\alpha}$. Sin embargo, como la función g tal que $\alpha = g(\tau)$ sólo tiene una expresión cerrada en algunas cópulas y es bastante costoso calcular numéricamente g' , no calcularemos las varianzas de los estimadores.

A parte de comparar las distancias entre las cópulas paramétricas y la no paramétrica, también podemos realizar una gráfica de λ_n y $\lambda_{\hat{\alpha}}$ o una gráfica cuantil-cuantil entre K_n y $K_{\hat{\alpha}}$ [27].

Con el siguiente algoritmo se pretende resumir el método de una forma compacta y lista para aplicar.

Algoritmo 7.2. *Dada una muestra $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ de $(X, Y) \sim C_\varphi(F, G)$, para estimar φ procedemos:*

- I. *Estimar τ mediante $\hat{\tau} = \frac{2(c-d)}{n^2-n} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)]$.*
- II. *Construir el estimador no paramétrico de K ,*

$$K_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i \leq z\}} \text{ con } Z_i = \frac{\#\{(X_j, Y_j) : X_j < X_i, Y_j < Y_i\}}{n-1}. \quad (7.18)$$

Un estimador no paramétrico de φ es $\varphi_n(u) = \exp\left\{\int_{u_0}^u \frac{1}{t-K_n(t)} dt\right\}$ con $0 < u_0 < 1$ constante.

- III. *Para cada familia Arquimediana con generador φ_α , estimar α mediante el método de los momentos*

$$\hat{\tau} = \tau(\alpha) \Rightarrow \hat{\alpha} \quad (7.19)$$

y construir $K_{\hat{\alpha}}(z) = z - \frac{\varphi_{\hat{\alpha}}(z)}{\varphi'_{\hat{\alpha}}(z)}$.

- IV. *Comparar las $K_{\hat{\alpha}}$ con K_n mediante la norma L^2 (también se pueden usar las normas L^1 o L^∞):*

$$d_2(K_{\hat{\alpha}}, K_n) = \left(\int_0^1 (K_{\hat{\alpha}}(t) - K_n(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.20)$$

y elegir la $K_{\hat{\alpha}}$ que la haga mínima. Adicionalmente, comparar gráficamente $\lambda_n(t) = t - K_n(t)$ y $\lambda_{\hat{\alpha}}(t) = \frac{\varphi_{\hat{\alpha}}(t)}{\varphi'_{\hat{\alpha}}(t)}$ (se ve mejor que $K_{\hat{\alpha}}$ y K_n) para ver el grado de ajuste.

Cabe destacar que este método se puede extender a cópulas Arquimedianas multivariantes [18, 27], aunque la flexibilidad de la dependencia que puede capturar es limitada, debido a los problemas que acarreaban las cópulas Arquimedianas multivariantes modeladas por

un único parámetro.

Si deseamos estimar la cópula de supervivencia³ porque queremos ajustar la función de supervivencia conjunta \check{H} de X e Y , en vez de su distribución H , el método descrito nos sirve con una pequeña modificación. Si la cópula de supervivencia la denotamos por \check{C} , sabemos que $\check{C}(U, V) \stackrel{d}{=} \check{H}(X, Y) \sim K$, lo que cambia es que ahora los Z_i no los estimamos por $\frac{n}{n-1}H_n(X_i, Y_i)$ sino por $W_i = \frac{n}{n-1}\check{H}_n(X_i, Y_i) = \frac{\#\{(X_j, Y_j): X_i < X_j, Y_i < Y_j\}}{n-1}$. El método es el mismo, sólo que cambiando Z_i por W_i .

El conjunto de datos que tratamos está formado por 655 análisis químicos de muestras de agua recogidas en Montrose, Western Colorado. Se miden las concentraciones en agua de los elementos: uranio (U), litio (Li), cobalto (Co), potasio (K), cesio (Cs), escandio (Sc) y titanio (Ti). Este conjunto de datos aparece por primera vez en [10] y está contenido en el paquete `copula` [83] bajo el nombre de `uranium`.

En la Figura 7.4 podemos ver un diagrama de dispersión matricial de las concentraciones de los distintos elementos medidos, con sus histogramas y las Tau de Kendall correspondientes a cada par de elementos. Nos hemos centrado en las concentraciones del escandio (Sc) y del cobalto (Co). A la derecha de la figura se puede ver una ampliación del diagrama de puntos para estos dos elementos.

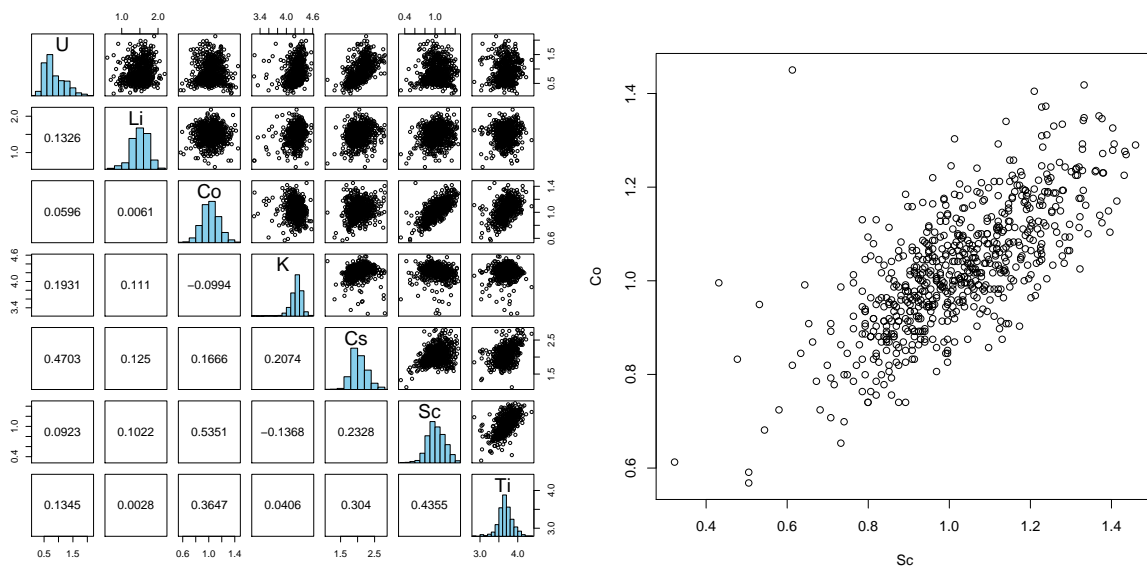


Figura 7.4: Diagramas de dispersión de los datos de uranio y del Sc y Co.

Para trabajar con las 22 cópulas de Nelsen usamos el paquete `fCopulae`, que tiene implementadas las funciones necesarias para calcular las Tau de Kendall de cada una de las

³Denotada por \check{C} en vez de \hat{C} para que no se entienda como una estimación.

22 cópulas (exacta y numéricamente), las funciones K_φ , las derivadas e inversas de φ y muchas funciones secundarias. El código necesario para implementar el método en **R** se encuentra en el Apéndice C. A él nos remitimos para los cálculos omitidos, mostrando solamente sus salidas más relevantes.

En la Tabla 7.1 podemos ver el ajuste paramétrico de las cópulas junto a las distancias L^2 , L^1 y L^∞ . Se han ajustado en dos escenarios: buscando la distribución conjunta y la función de supervivencia. En ambos casos la cópula con distribución $K_{\hat{\alpha}}$ más cercana a K_n , en las normas L^2 y L^1 , es la cópula 14 de Nelsen (cópula A16 en el catálogo). En el caso de la norma L^∞ , el mejor ajuste es el de la cópula 12 de Nelsen (cópula A15 en el catálogo), pero para la función de supervivencia el ajuste óptimo sigue siendo el de N14. En vista de los resultados, la cópula que mejor ajusta los datos es sin duda la cópula 14. También hay que decir que los errores de las tres “mejores” cópulas son bastante similares.

Cópula	$\hat{\alpha}$	Distribución conjunta			Función supervivencia		
		L^2	L^1	L^∞	L^2	L^1	L^∞
N1	2.3022	0.0345	0.0309	0.0530	0.0326	0.0299	0.0472
N2	4.3022	0.0730	0.0599	0.0701	0.0750	0.0621	0.0723
N3	1.0000	0.0550	0.0479	0.0868	0.0538	0.0470	0.0909
N4	2.1511	0.0136	0.0132	0.0270	0.0166	0.0152	0.0296
N5	6.4140	0.0181	0.0147	0.0388	0.0189	0.0153	0.0425
N6	3.1480	0.0326	0.0301	0.0369	0.0350	0.0315	0.0487
N7	0.5835	0.3141	0.2624	0.6216	0.3151	0.2624	0.6079
N8	∞	0.0550	0.0479	0.0868	0.0538	0.0470	0.0909
N9	0.0000	0.1425	0.1286	0.2078	0.1427	0.1287	0.2052
N10	0.0000	0.1425	0.1286	0.2078	0.1427	0.1287	0.2052
N11	0.0000	0.1425	0.1286	0.2078	0.1427	0.1287	0.2052
N12	1.4341	0.0166	0.0135	0.0227	0.0146	0.0124	0.0243
N13	4.8083	0.0220	0.0200	0.0377	0.0202	0.0186	0.0390
N14	1.6511	0.0100	0.0077	0.0306	0.0087	0.0071	0.0208
N15	2.6511	0.0287	0.0267	0.0389	0.0312	0.0285	0.0344
N16	∞	0.0550	0.0479	0.0868	0.0538	0.0470	0.0909
N17	9.0626	0.0200	0.0175	0.0407	0.0198	0.0161	0.0455
N18	2.8681	0.1308	0.0981	0.1086	0.1327	0.1002	0.1101
N19	0.6024	0.0475	0.0410	0.0661	0.0454	0.0406	0.0533
N20	0.8096	0.0465	0.0403	0.0655	0.0444	0.0398	0.0553
N21	3.4294	0.0414	0.0379	0.0519	0.0439	0.0395	0.0510
N22	0.0000	0.1425	0.1286	0.2078	0.1427	0.1287	0.2052

Tabla 7.1: Ajuste de las 22 cópulas Arquimedianas de Nelsen.

En las Figuras 7.5 y 7.6 se ve una comparación gráfica entre λ_n y las funciones $\lambda_{\hat{\alpha}}$ correspondientes a las cinco cópulas que mejor aproximan la distribución empírica K_n . Estas

cóputas se encuentran ordenadas por orden de proximidad (con L^2) en la leyenda del gráfico.

Ahora que tenemos la cóputa ajustada, podemos estimar las curvas de regresión cuantil para los cuantiles 0.05, 0.25, 0.5, 0.75 y 0.95. El procedimiento es el descrito en la sección anterior, usar las distribuciones marginales empíricas F_n y G_n y construir las curvas mediante (7.7). Así, en la Figura 7.7 representamos las curvas cuantiles reales de la cóputa 14 de Nelsen, junto a la nube de puntos de los rangos de la muestra de Sc y Co. En la Figura 7.8 se representan las curvas cuantiles *estimadas* de la distribución conjunta $H = C_\theta(F, G)$ junto a los datos observados.

Las curvas de regresión cuantil se pueden suavizar si usamos la estimación núcleo para las densidades de las marginales. La estimación núcleo de la densidad f a partir de la muestra $\{X_i\}_{i=1}^n$ es la densidad

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (7.21)$$

donde K es el núcleo y h el parámetro ventana. Para más información sobre la estimación núcleo se puede consultar [55] y las referencias allí citadas. Escogiendo el núcleo gaussiano y la ventana por validación cruzada sesgada (ver Figura 7.9) podemos suavizar las curvas cuantiles, como se muestra en la Figura 7.10. De esta forma se gana regularidad, sobre todo en los extremos.

El código para hacer la estimación está en el Apéndice C.

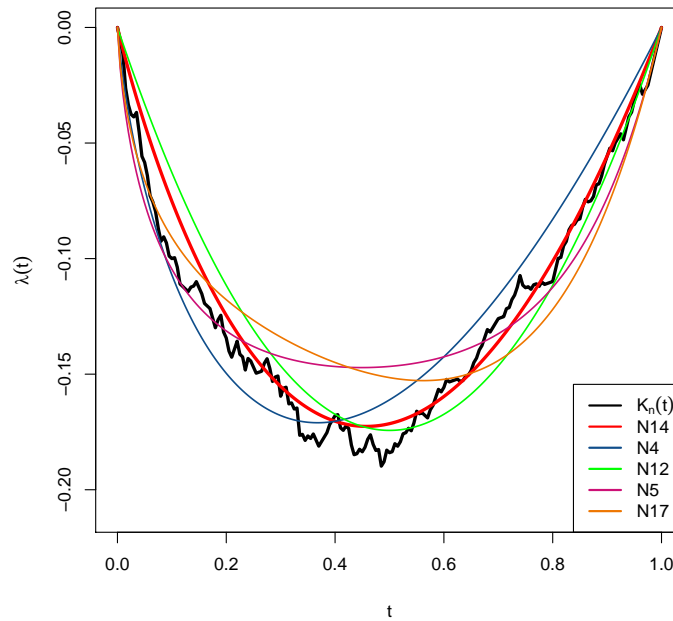


Figura 7.5: λ_n frente a las cinco $\lambda_{\hat{\alpha}}$ más próximas.

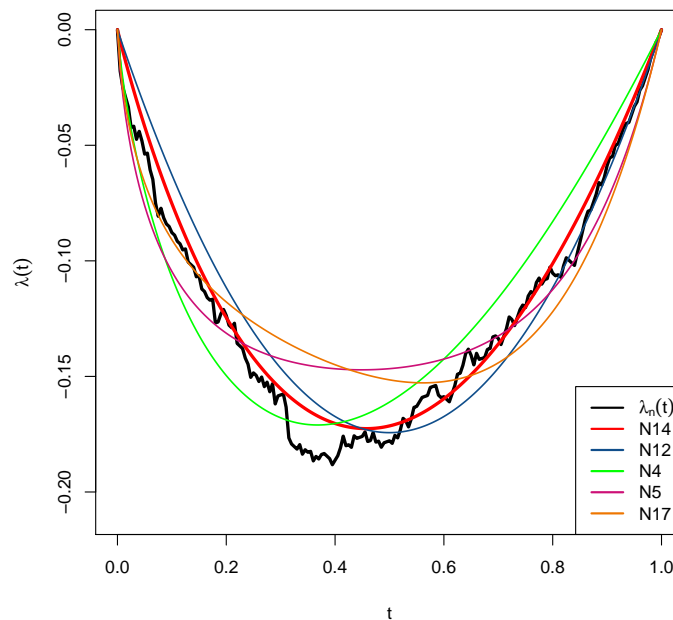


Figura 7.6: λ_n frente a las cinco $\lambda_{\hat{\alpha}}$ más próximas, para la cópula de supervivencia.

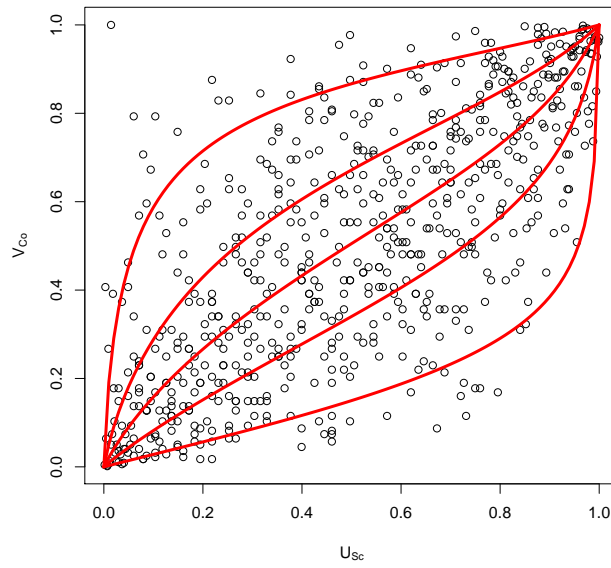


Figura 7.7: Curvas de regresión cuantil exactas para la cópula N14, frente a los rangos de la muestra.

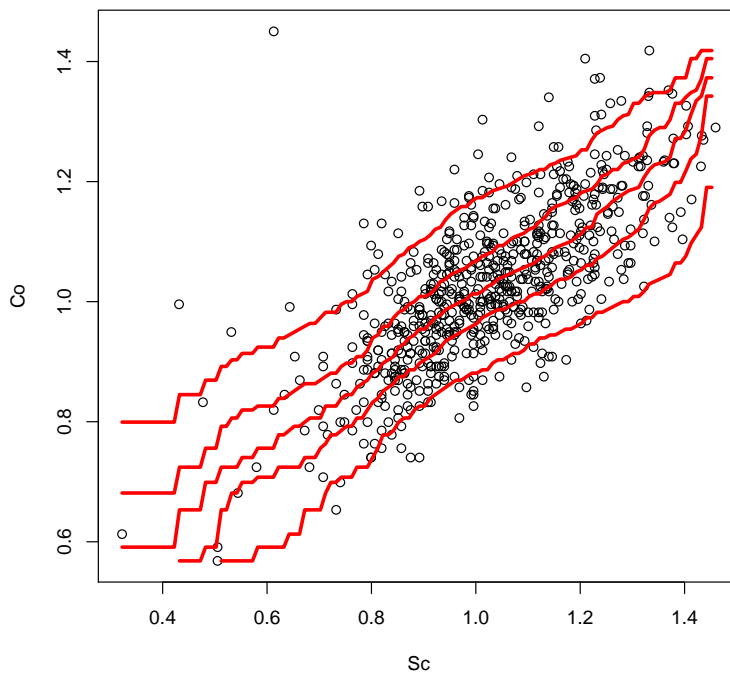


Figura 7.8: Curvas de regresión cuantil estimadas con las distribuciones marginales empíricas.

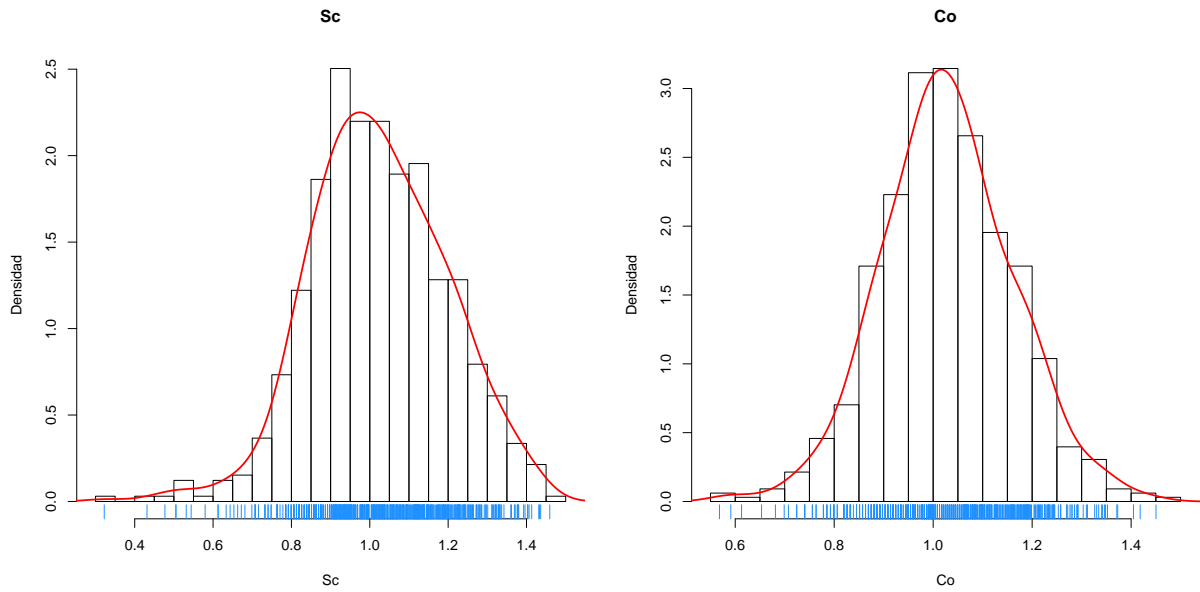


Figura 7.9: Estimación núcleo de las densidades marginales del SC y Co.

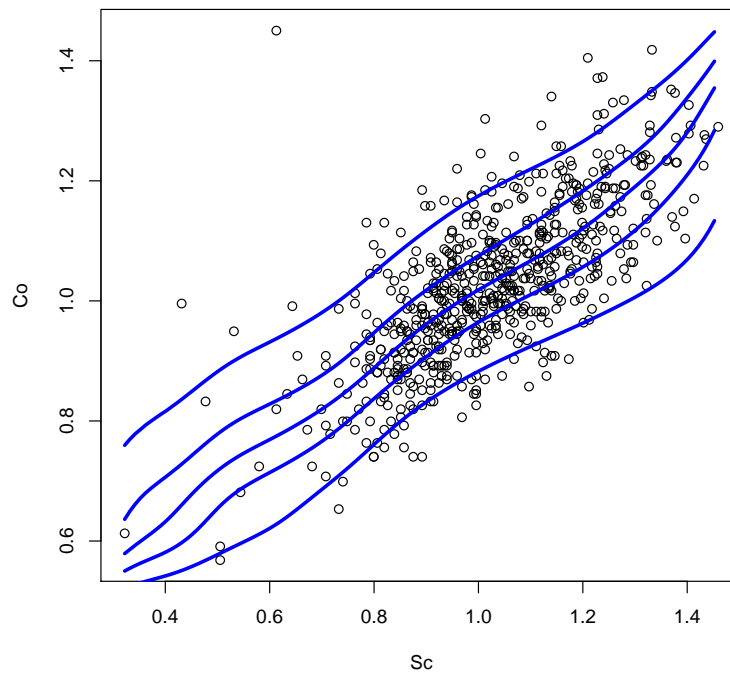


Figura 7.10: Curvas de regresión cuantil estimadas con las distribuciones de las densidades núcleo.

7.3. Cópulas y datos direccionales: relación entre dirección del viento y concentración de dióxido de azufre

En las ciencias naturales a menudo surge el problema de tratar con fenómenos cíclicos o con variables que miden ángulos o direcciones. Algunos ejemplos de estas variables son la dirección del viento, la dirección de partida de animales, ángulos dihédricos en moléculas, . . . Los fenómenos cíclicos a menudo aparecen relacionados con la sociedad: distribución diaria de accidentes de tráfico, distribución horaria de entrada de clientes en una tienda, . . . El análisis estadístico de este tipo de datos requiere nuevas técnicas distintas de las usuales, pues hay que tener en cuenta las peculiaridades de los datos direccionales. Por ejemplo, si estamos tratando con ángulos en una circunferencia, la media entre 2° y 358° no es 180° , ya que 0° equivale a 360° .

En esta sección revisaremos la teoría de datos direccionales y su relación con las cópulas. Esta relación nos servirá para explorar la relación entre la dirección del viento y la concentración de dióxido de azufre (SO_2) alrededor de la central térmica de As Pontes.

Una distribución circular es una distribución cuyo soporte está contenido en la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 . Al estar asociado cada punto $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ de \mathbb{S}^1 con una dirección en el plano \mathbb{R}^2 , esta distribución asigna probabilidad a cada dirección $\theta \in [0, 2\pi)$. Las distribuciones circulares pueden ser discretas o absolutamente continuas, en cuyo caso tienen una densidad asociada. De forma general, hablamos de distribuciones direccionales al referirnos a puntos en la esfera \mathbb{S}^p , que miden direcciones en \mathbb{R}^{p+1} .

Definición 7.2. Una variable aleatoria *circular* absolutamente continua Θ es una variable con distribución circular dada por una densidad f_Θ que verifica:

- I. $f_\Theta(\theta) \geq 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$.
- II. $\int_r^{2\pi+r} f_\Theta(\theta) d\theta = 1, \forall r \in \mathbb{R}$.
- III. $f_\Theta(\theta) = f_\Theta(\theta + 2\pi k), \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

La primera condición es habitual para una densidad, pero la segunda y la tercera, *las condiciones de periodicidad*, son características de las variables aleatorias circulares. La función de distribución será periódica al serlo la densidad: $F_\Theta(\theta + 2\pi k) = F_\Theta(\theta), k \in \mathbb{Z}$. Esto puede parecer un poco confuso, porque en vez de cumplir que $F_\Theta(+\infty) = 1$ y $F_\Theta(-\infty) = 0$, como las distribuciones unidimensionales, cumple que $\lim_{\theta \rightarrow (2\pi k)^-} F_\Theta(\theta) = 1$ y $\lim_{\theta \rightarrow (2\pi k)^+} F_\Theta(\theta) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, todas **las distribuciones circulares tienen**

una discontinuidad en $2\pi k$ de salto 1, para $k \in \mathbb{Z}$, que corresponde al inicio de un nuevo ciclo.

La representación *lineal* de la densidad y de la distribución circular adapta la representación *circular* a la recta real. En la Figura 7.11 están las dos representaciones, una forma de ver gráficamente el motivo de la periodicidad.

La distribución circular más sencilla es la circular uniforme $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, que asigna la misma probabilidad a cualquier dirección. Una distribución muy importante es la distribución de von Mises.

Definición 7.3. La *distribución de von Mises* está dada por la densidad

$$f(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}, \tag{7.22}$$

donde $\mu \in [0, 2\pi)$ es la media, $\kappa \geq 0$ es la medida de concentración de la distribución en la dirección μ e $I_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de primer tipo y orden cero,

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos \theta} d\theta. \tag{7.23}$$

La distribución uniforme es un caso límite de la von Mises, correspondiente a $\kappa = 0$.

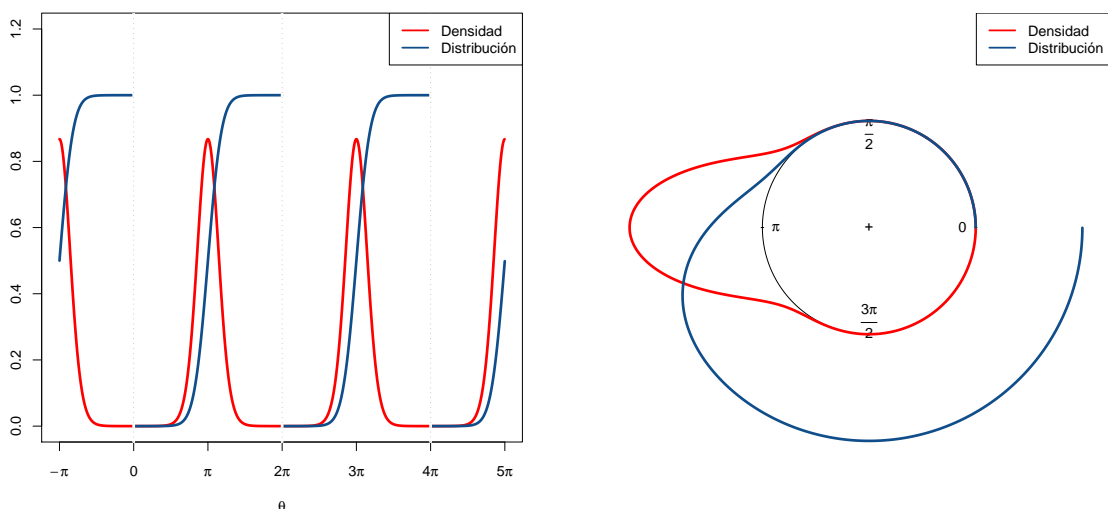


Figura 7.11: Representación lineal y circular de la densidad y la distribución von Mises con $\mu = \pi$ y $\kappa = 10$.

La importancia de la distribución de von Mises y su similitud con la distribución normal univariante (una moda, simétrica) hace que también se la conozca como la distribución

circular normal.

Las características de la distribución de von Mises hacen que no sea adecuada para modelar datos que presenten más de una moda o asimetría. Para resolver este inconveniente, se puede tratar con mixturas de von Mises (como haremos más adelante). Sin embargo, otra alternativa interesante, debida a Fernández–Durán [22], es recurrir a las distribuciones circulares basadas en Sumas Trigonómicas No Negativas (STNN). Estas distribuciones están fundamentadas en el siguiente teorema, enunciado por Fejér en 1915.

Teorema 7.1. *La suma trigonométrica de orden n y coeficientes reales dada por:*

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)), \tag{7.24}$$

es no negativa para todo $\theta \in \mathbb{R}$ si y sólo si existen números complejos c_k , $k = 0, \dots, n$, tales que

$$a_0 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \quad y \quad a_k - ib_k = 2 \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{\nu+k} \bar{c}_\nu \quad \text{para } k = 1, \dots, n. \tag{7.25}$$

Definición 7.4. Las distribuciones circulares basadas en sumas trigonométricas, en adelante *distribuciones de STNN*, no negativas se definen como

$$f(\theta; \underline{c}, n) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)), \tag{7.26}$$

donde $\sum_{k=0}^n |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}$ y $a_k - ib_k = 2 \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{\nu+k} \bar{c}_\nu$ para los números complejos c_k , $k = 0, \dots, n$. Los parámetros de esta distribución son el vector complejo \underline{c} y el número de términos n , con lo que se tienen $2n + 2$ parámetros libres. La distribución uniforme se obtiene cuando $a_k = b_k = 0$ para $k = 0, \dots, n$ o $n = 0$.

La ventaja de las distribuciones STNN es que son flexibles y permiten ajustar distintas estructuras de datos. Sin embargo, presentan desventajas como la dificultad del cálculo de sus parámetros. El paquete `CircNNTSR`, creado por Fernández–Durán implementa la máxima verosimilitud para estas distribuciones.

Ahora que hemos visto cómo son las distribuciones circulares, nos ocupamos de estudiar las cópulas asociadas a los pares de variables circular–lineal (Θ, R) y circular–circular (Θ_1, Θ_2) . Su comportamiento es muy distinto al de dos variables lineales: mientras en éstas el soporte está contenido en el plano \mathbb{R}^2 , en las variables circular–lineal está contenido el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y en las circular–circular en el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

La dificultad que presenta la construcción de la cópula es preservar la condición de periodicidad en las componentes circulares de la densidad conjunta:

$$f_{\Theta,R}(\theta, r) = f_{\Theta,R}(\theta + 2\pi k, r), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (7.27)$$

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1 + 2\pi k_1, \theta_2 + 2\pi k_2), \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (7.28)$$

Usando la representación canónica de la densidad (1.66) y debido a la discontinuidad que presentan las distribuciones circulares en $2\pi k$, la densidad de una *cópula circular-lineal* tiene que cumplir:

$$c_{\Theta,R}(0, v_R) = c_{\Theta,R}(1, v_R), \quad \forall v_R \in [0, 1]. \quad (7.29)$$

Esta condición es necesaria para salvar la discontinuidad en $\theta = 2\pi k$ de la distribución F_Θ y que la densidad $f_{\Theta,R}$ sea continua. Para el caso de una *cópula circular-circular* hay que exigir:

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(0, v_{\Theta_2}) = c_{\Theta_1, \Theta_2}(1, v_{\Theta_2}), \quad \forall v_{\Theta_2} \in [0, 1], \quad (7.30)$$

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(u_{\Theta_1}, 0) = c_{\Theta_1, \Theta_2}(u_{\Theta_1}, 1), \quad \forall u_{\Theta_1} \in [0, 1]. \quad (7.31)$$

Johnson y Wehrly [38] obtuvieron en 1978 una forma de construir la densidad conjunta de una variable circular Θ y una lineal R a partir de sus densidades marginales.

Teorema 7.2. *Sean f_Θ una densidad circular y f_R una densidad lineal con funciones de distribución F_Θ y F_R , respectivamente. Sea $g(\cdot)$ una densidad circular. Entonces*

$$f_{\Theta,R}(\theta, r) := 2\pi g [2\pi(F_\Theta(\theta) + F_R(r))] f_\Theta(\theta) f_R(r), \quad (7.32)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r \in \mathbb{R}$, es una densidad para una distribución circular-lineal con las densidades marginales f_Θ y f_R .

Comparando (7.32) con la representación canónica de la densidad para (Θ, R) ,

$$f_{\Theta,R}(\theta, r) = c_{\Theta,R}(F_\Theta(\theta), F_R(r)) f_\Theta(\theta) f_R(r) \quad (7.33)$$

se tiene que

$$c_{\Theta,R}(F_\Theta(\theta), F_R(r)) = 2\pi g [2\pi(F_\Theta(\theta) + F_R(r))]. \quad (7.34)$$

Por tanto la densidad de la cópula $C_{\Theta,R}$ está dada por una densidad circular g . La densidad de esta cópula es

$$c_{\Theta,R}(u, v) = 2\pi g [2\pi(u + v)], \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \quad (7.35)$$

Con (7.32), (7.34) y (7.35) tenemos una familia de cópulas circular–lineal tan grande como el conjunto de las densidades circulares y que nos permite modelar la dependencia entre una variable circular y una lineal.

Wehrly y Johnson [80] también obtuvieron un resultado análogo para variables circular–circular en 1980.

Teorema 7.3. Sean f_{Θ_1} y f_{Θ_2} dos densidades circulares y F_{Θ_1} y F_{Θ_2} sus funciones de distribución. Sea $g(\cdot)$ una densidad circular. Entonces

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) := 2\pi g [2\pi(F_{\Theta_1}(\theta_1) + F_{\Theta_2}(\theta_2))] f_{\Theta_1}(\theta_1) f_{\Theta_2}(\theta_2), \tag{7.36}$$

con $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, es una densidad para una distribución circular–circular con las densidades marginales f_{Θ_1} y f_{Θ_2} .

Al igual que en el caso circular–lineal, identificamos la densidad de la cópula C_{Θ_1, Θ_2} como

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(F_{\Theta_1}(\theta_1), F_{\Theta_2}(\theta_2)) = 2\pi g [2\pi(F_{\Theta_1}(\theta_1) + F_{\Theta_2}(\theta_2))] \tag{7.37}$$

y esto nos permite obtener una familia de cópulas circular–circular basadas en las densidades circulares. Esta familia es la misma que para el caso circular–lineal, y está dada por las densidades de las cópulas

$$c_{\Theta_1, \Theta_2}(u, v) = 2\pi g [2\pi(u + v)], \quad \forall u, v \in \mathbb{I}. \tag{7.38}$$

Es importante notar que estos resultados no son caracterizaciones y que, por lo tanto, la cópula *real* de dichas variables no tiene por qué ser (7.35). Ahora bien, para su estimación es útil suponer que tiene esa forma y, además, debido a la gran variedad de cópulas de esa familia (tantas como densidades circulares), no es una restricción muy fuerte.

Después de expresar densidades de variables circular–lineal mediante cópulas, podemos proceder a su estimación en dos etapas: primero en las marginales y luego en la cópula. El procedimiento lo describimos para variables circular–lineal porque es el que se aplica posteriormente, pero la estimación de circular–circular es análoga. El objetivo es la estimación de la **densidad conjunta** $f_{\Theta, R}$.

La gran ventaja de la expresión

$$\begin{aligned} f_{\Theta, R}(\theta, r) &= c_{\Theta, R}(F_{\Theta}(\theta), F_R(r)) f_{\Theta}(\theta) f_R(r) \\ &= 2\pi g [2\pi(F_{\Theta}(\theta) + F_R(r))] f_{\Theta}(\theta) f_R(r) \end{aligned}$$

es que separa la distribución conjunta en las marginales y la densidad de la cópula.

Podemos aplicar un procedimiento de **estimación en dos etapas** para estimar $f_{\Theta,R}$.

Algoritmo 7.3. Dada la muestra $\{(\theta_i, r_i)\}_{i=1}^n$,

- I. Obtenemos las estimaciones de las densidades marginales, \hat{f}_{Θ} y \hat{f}_R , mediante las muestras $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ y $\{r_i\}_{i=1}^n$ respectivamente. A partir de las densidades, calculamos \hat{F}_{Θ} y \hat{F}_R .
- II. Construimos la muestra artificial $\left\{2\pi \left(\hat{F}_{\Theta}(\theta_i) + \hat{F}_R(r_i)\right)\right\}_{i=1}^n$ y obtenemos la estimación de la densidad circular, \hat{g} .
- III. La densidad estimada en dos etapas es

$$\hat{f}_{\Theta,R}(\theta, r) = 2\pi\hat{g} \left[2\pi(\hat{F}_{\Theta}(\theta) + \hat{F}_R(r))\right] \hat{f}_{\Theta}(\theta)\hat{f}_R(r).$$

Entonces la estimación de la densidad conjunta se reduce a la estimación de tres densidades, dos de ellas circulares. Podemos preguntarnos si no sería más sencillo estimar directamente la distribución conjunta por medio de un estimador no paramétrico, por ejemplo de tipo núcleo. El problema es que así hay que construir un núcleo bivalente que respete que una de las componentes sea circular, de tal forma que “pegue” el 0 con 2π . Otra ventaja de este método es que al estimar funciones unidimensionales evita el **problema de la dimensionalidad**, aunque para el caso bidimensional sea un problema leve.

Para estimar las densidades circulares y lineal podemos usar los siguientes métodos:

- \hat{f}_R : paramétricamente por máxima verosimilitud o mediante tipo núcleo. Se puede elegir el núcleo gaussiano y validación cruzada para la ventana.
- \hat{f}_{Θ} , \hat{g} : de forma paramétrica, por máxima verosimilitud de mixturas de von Mises o de distribuciones de STNN. De forma no paramétrica, con estimación tipo núcleo circular.

La estimación no paramétrica de la densidad direccional mediante núcleo fue propuesta por primera vez por Hall, Watson y Cabrera [34]. Se trata de una modificación de la estimación tipo núcleo q -dimensional,

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh^q} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \tag{7.39}$$

para datos en \mathbb{S}^{q-1} . En este caso, la cantidad $x - X_i$, que mide distancias euclídeas, se reemplaza por $x^T X_i$, que mide el coseno del ángulo entre x y X_i si están en \mathbb{S}^{q-1} . Este

estimador tiene la forma

$$\hat{f}_\kappa(x) = \frac{c_0(\kappa)}{n} \sum_{i=1}^n K(\kappa x^T X_i), \tag{7.40}$$

donde κ reemplaza a h^{-1} y $c_0(\kappa)$ es una constante tal que \hat{f}_κ es densidad. En el caso circular, es decir con datos en \mathbb{S}^1 , $x = (\cos \theta, \sin \theta)$, $X_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ y $x^T X_i = \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i = \cos(\theta - \theta_i)$, con lo cual (7.40) se expresa mediante

$$\hat{f}_\kappa(\theta) = \frac{c_0(\kappa)}{n} \sum_{i=1}^n K(\kappa \cos(\theta - \theta_i)). \tag{7.41}$$

Es importante notar las diferencias entre los núcleos euclídeos y circulares. Cuando x está cercano a X_i , $x - X_i$ es cercano a cero, pero $x^T X_i$ lo es a uno, por lo que la estructura de los núcleos debe ser distinta. Además, frente a la naturaleza suave de los núcleos euclídeos, los circulares deben variar rápidamente [34]. También es importante comentar que el comportamiento de la ventana κ es el inverso del caso euclídeo: valores grandes infrasuavizan y valores pequeños sobresuavizan.

Un caso muy importante es el núcleo asociado a la densidad von Mises, $K(t) = e^t$, ya que este caso tenemos

$$\hat{f}_\kappa(\theta) = \frac{1}{2\pi n I_0(\kappa)} \sum_{i=1}^n \exp(\kappa \cos(\theta - \theta_i)), \tag{7.42}$$

al ser $c_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)}$. Así, la ventana κ es el parámetro de concentración de la distribución von Mises en la dirección θ_i , que actúa como la media. Este núcleo es el más utilizado en la práctica y se le conoce por *núcleo von Mises*.

Al igual que en el caso euclídeo, la elección del parámetro ventana es crucial en la estimación tipo núcleo circular. Hall, Watson y Cabrera [34] proponen la elección de la ventana por validación cruzada para minimizar el error cuadrático y el error de Kullback–Leibler (correspondiente a la máxima verosimilitud).

La idea de la minimización cuadrática consiste en obtener la ventana κ que minimice $\int (\hat{f}_\kappa(\theta) - f(\theta))^2 d\theta$, lo que es equivalente a que minimice $\int \hat{f}_\kappa(\theta)^2 d\theta - 2 \int \hat{f}_\kappa(\theta) f(\theta) d\theta$. El problema es que f no es conocida, pero podemos sustituirla por la propia estimación, corregida por validación cruzada para eliminar la dependencia con los datos. De esta forma, la ventana óptima cuadrática por validación cruzada para la muestra $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ es

$$\hat{\kappa}_2 = \arg \min_{\kappa \geq 0} \int \hat{f}_\kappa(\theta)^2 d\theta - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_\kappa^{-i}(\theta_i), \tag{7.43}$$

donde \hat{f}_κ^{-i} es la estimación núcleo de la densidad circular sin el dato i -ésimo,

$$\hat{f}_\kappa^{-i}(\theta) = \frac{c_0(\kappa)}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K(\kappa \cos(\theta - \theta_j)). \tag{7.44}$$

La validación cruzada también se puede usar para corregir la estimación por máxima verosimilitud de la ventana, cuando suponemos que \hat{f}_κ es la densidad de la muestra. De esta forma se obtiene la ventana máximo verosímil por validación cruzada (minimiza el error de Kullback–Leibler)

$$\hat{\kappa}_{MV} = \arg \max_{\kappa \geq 0} \sum_{i=1}^n \log \hat{f}_\kappa^{-i}(\theta_i). \tag{7.45}$$

Recientemente (2008), Taylor [77] propuso una regla de selección plug-in para la ventana circular en densidades von Mises.

A continuación aplicamos estas técnicas al estudio de un caso real, la **relación entre la dirección del viento y la concentración de dióxido de azufre (SO₂)** en torno a la **central térmica de As Pontes**.

Las centrales térmicas son fuentes importantes de emisión de SO₂, al quemar carbón que contiene azufre. De forma secundaria, también es producido por las emisiones del tráfico rodado (la gasolina y el diésel contienen azufre). Al oxidarse, el SO₂ se convierte en ácido sulfúrico (H₂SO₄) que luego forma la lluvia ácida al mezclarse con vapor de agua. La lluvia ácida produce efectos corrosivos en las plantas y en las infraestructuras, por lo que es necesario un control exhaustivo de la emisión de dióxido de azufre.

Algunos niveles particulares de concentración de SO₂ son⁴:

- Umbral de olor: 1.31 mg/m³.
- Concentración máxima en lugares de trabajo: 5.2 mg/m³ (largo plazo), 13 mg/m³ (corto plazo).
- Valor letal: 262 mg/m³.

Los datos del estudio provienen de cinco estaciones meteorológicas alrededor de la central térmica, cuyas localizaciones se pueden ver en el mapa de la Figura 7.14, en las que se ha medido, entre otras variables, la dirección del viento y la concentración de dióxido de azufre. Las mediciones son del mes de agosto de 2009 y se han recogido, salvo datos

⁴Fuente: American Conference of Industrial Hygienists (ACGIH).

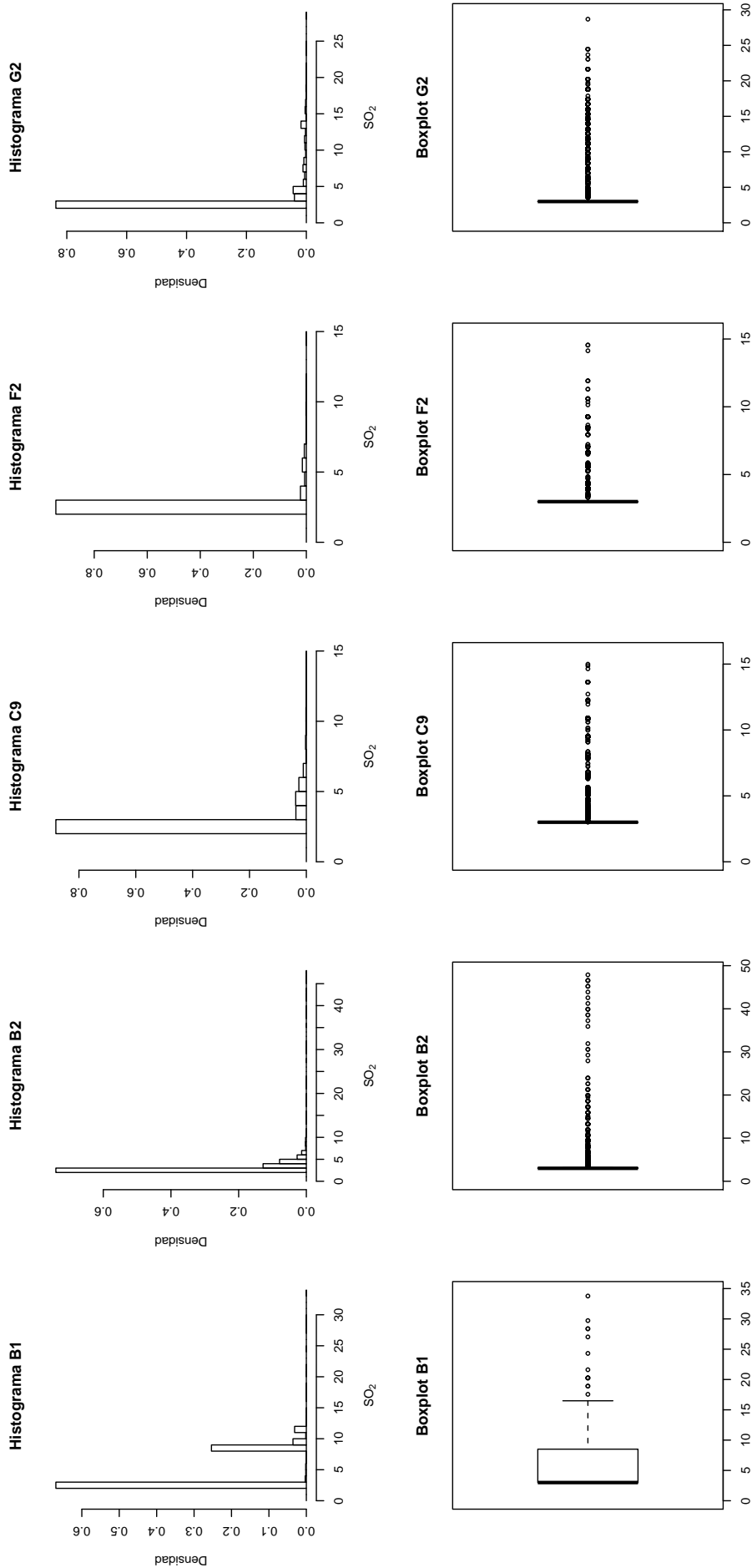


Figura 7.12: Histogramas y diagramas de cajas para el SO₂.

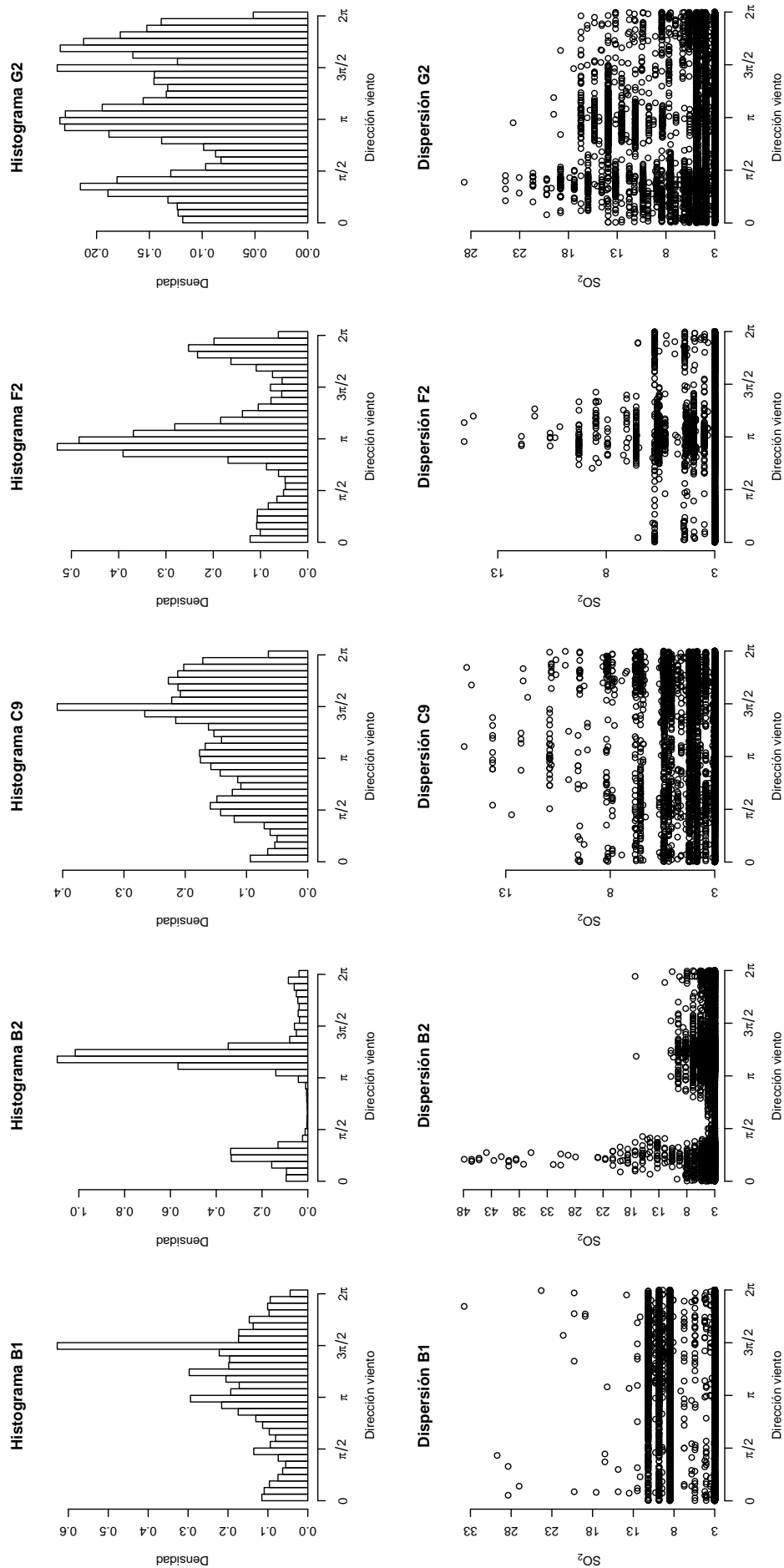


Figura 7.13: Histogramas para el viento y gráficos de dispersión de dispersión viento-SO₂.

faltantes, cada minuto. Esto hace un total de 26532 observaciones.

Para comprender bien los datos, conviene hacer algunas aclaraciones:

- La dirección del viento se mide como un ángulo en $[0, 2\pi)$, en sentido antihorario. Así, 0 , $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$ se corresponden con los puntos cardinales este, norte, oeste y sur, respectivamente.
- Se mide la **dirección de incidencia del viento**. Por tanto, el ángulo $\frac{\pi}{2}$ indica que la estación **recibe** viento proveniente del norte.
- La concentración del SO_2 se mide en $\mu\text{g}/\text{m}^3$ y la mínima posible es de $3 \mu\text{g}/\text{m}^3$, ya que los medidores no determinan una cantidad menor. Así, una medición de $3 \mu\text{g}/\text{m}^3$ indica que la concentración real es menor o igual que $3 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

En la Tabla 7.2 y en las Figuras 7.12 y 7.13 se recoge un análisis exploratorio de los datos, realizado para cada estación. Los estadísticos descriptivos del SO_2 son los habituales, pero para la dirección del viento tenemos que considerar estadísticos circulares [49]:

Media circular: si los ángulos $\theta_1, \dots, \theta_n$ se expresan en función de los puntos x_1, \dots, x_n que caracterizan en la circunferencia, la media circular $\bar{\theta}$ se calcula como el ángulo del punto \bar{x} , que representa la media o centro de gravedad de x_1, \dots, x_n .

Mediana circular: es el ángulo ϕ tal que la mitad de los ángulos pertenecen a $[\phi, \phi + \pi)$ y la mayoría están más cerca de ϕ que de $\phi + \pi$.

Longitud de la media: es la distancia \bar{R} del punto \bar{x} al origen y da una idea de la concentración de las direcciones alrededor de la media. Su valor está entre 0 (gran dispersión) y 1 (concentración total).

Varianza circular: se define como $1 - \bar{R}$ y es una transformación de la longitud de la media para medir la dispersión, en vez de la concentración.

Llama la atención la proporción de datos en los que la concentración de dióxido de azufre es mínima, en torno a un 75% de la muestra, haciendo que la mayoría de los datos mayores que 3 sean considerados atípicos. Esto supone un problema a la hora de modelar las distribuciones del SO_2 , pues para absorber esta gran masa de probabilidad se tiene que incluir una mixtura con componente discreta en 3. Para evitar este inconveniente, trabajamos con las observaciones de la muestra en las que el SO_2 es superior a $3 \mu\text{g}/\text{m}^3$, lo que además es deseable, pues de esta forma estudiamos la **relación del viento con las presencia de dióxido de azufre significativa**.

En lo que respecta a las direcciones del viento, en la Figura 7.13 se observa que hay una clara multimodalidad. Las estaciones B1, B2 y F2 parecen tener dos modas y C9 y G2

tres modas. Debido a esto, un ajuste de estas distribuciones mediante una von Mises no es posible, al tener ésta una única moda y hay que pensar en usar mixturas de von Mises o distribuciones de STNN. La multimodalidad se refleja en la dispersión que presentan las direcciones del viento en algunas estaciones.

Dióxido de azufre (SO₂)	B1	B2	C9	F2	G2
Media	4.936	3.387	3.218	3.119	3.727
Desviación t.	2.850	1.510	0.801	0.607	2.360
Mínimo	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
Primer cuartil	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
Mediana	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
Tercer cuartil	8.510	3.070	3.000	3.000	3.000
Máximo	33.770	47.880	14.990	14.550	28.690
Dirección viento	B1	B2	C9	F2	G2
Media circular	4.103	3.899	4.531	3.282	4.309
Mediana circular	4.180	3.769	4.578	3.184	4.799
Longitud de la media	0.306	0.411	0.228	0.235	0.068
Varianza circular	0.693	0.588	0.771	0.764	0.931

Tabla 7.2: Estadísticos descriptivos para el SO₂ y la dirección del viento.

Los gráficos de dispersión muestran que en las estaciones B2 y F2 hay una marcada relación entre la presencia de SO₂ y la dirección del viento, que se manifiesta en mayores concentraciones de puntos en determinadas direcciones. En la estación B1 destaca la presencia de líneas horizontales de observaciones, que podrían hacer pensar que la dirección del viento no es influyente en el SO₂, al estar B1 tan cerca de la central. Sin embargo, las concentraciones de puntos en esas líneas no son homogéneas, como se aprecia en el gráfico de la Figura 7.15, y hay una relación clara entre viento y SO₂.

En la Figura 7.15, se presentan los histogramas circulares para la dirección del viento. Cada punto sobre la circunferencia equivale a una observación en esa dirección, denotando por los colores rojo y azul cuando la observación de la dirección del viento lleva asociada una concentración de más de 3 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ o de más de 10 $\mu\text{g}/\text{m}^3$, respectivamente. Esta es la mejor manera de ver las relaciones entre la dirección del viento y la concentración. Además, se puede combinar con el mapa de la Figura 7.14 para ver la situación de las estaciones y de la central y así tener una idea de la influencia de la térmica.

Entre las estaciones, el comportamiento más sorprendente es el de B2, en la que se aprecia claramente la influencia de dos direcciones de viento contrapuestas: el sudeste, de mayor frecuencia y el noroeste, de menor. Esto es consecuencia de la localización geográfica particular de la estación, situada en el parque eólico de Coto Teixido, lo que a priori le otorga

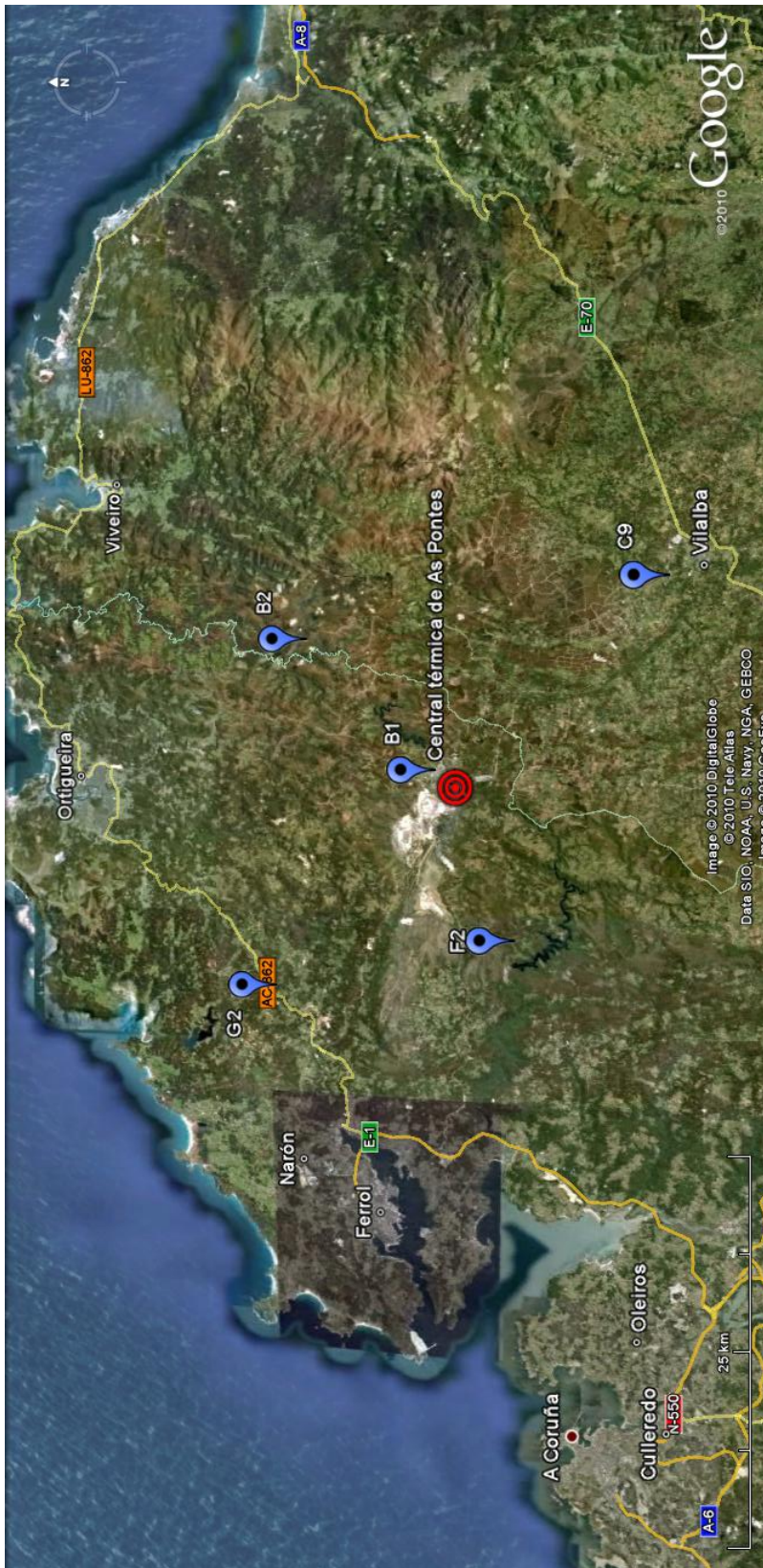


Figura 7.14: Situación de la central térmica y de las estaciones meteorológicas.

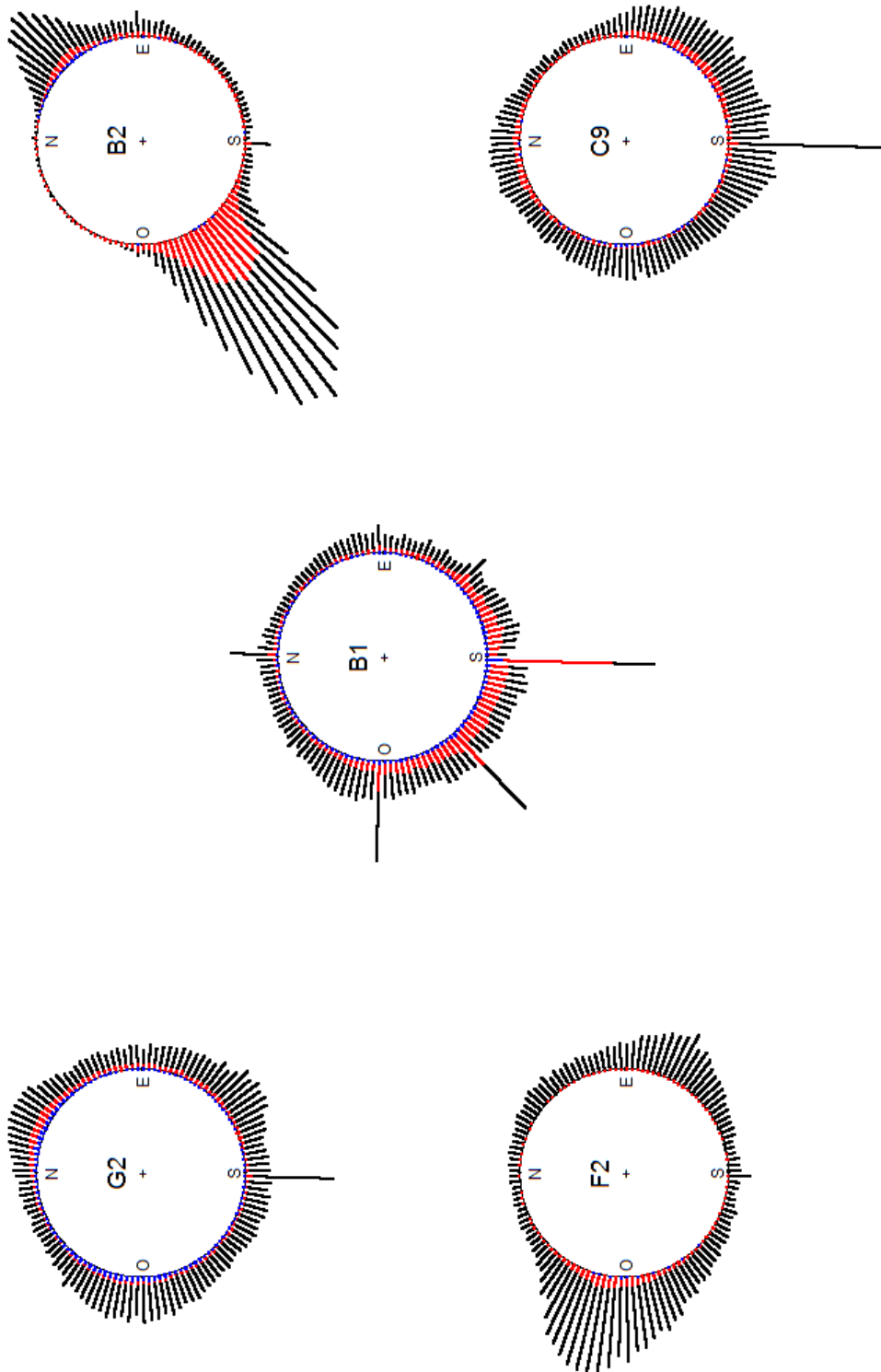


Figura 7.15: Histogramas circulares de la dirección del viento y la presencia de SO₂.

vientos bien definidos (rápidos y en dos direcciones muy marcadas). En la Tabla 7.3 se ve que la velocidad de los vientos, medidos en km/h, es claramente superior en la estación B2, con una media de 20 km/h.

En la Figura 7.16 se puede ver la situación de la estación, en la cima de un monte entre sus laderas sudeste y noroeste, cada una de ellas formando un pequeño corredor encajonado. La ladera sudeste además recibe el viento que es canalizado en la cuenca del río Sor, lo que hace aumentar la llegada de viento de esta dirección.

Velocidad viento	B1	B2	C9	F2	G2
Media	3.147	20.050	4.409	7.800	4.064
Desviación t.	2.688	11.451	3.373	5.210	6.233
Mínimo	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Primer cuartil	1.260	10.260	1.800	3.600	1.800
Mediana	2.520	19.080	3.420	6.660	3.060
Tercer cuartil	4.320	29.160	6.120	11.340	5.040
Máximo	30.240	57.420	27.720	42.48	215.280

Tabla 7.3: Estadísticos descriptivos de la velocidad del viento en las cinco estaciones.

Al tener B2 un impacto del viento tan bien definido, por ser rápido y poco cambiante, se puede modelar de una forma más satisfactoria la relación con la concentración de dióxido de azufre. Por eso y porque un estudio detallado de las cinco estaciones sería demasiado largo, **nos centraremos en el estudio de la estación B2.**

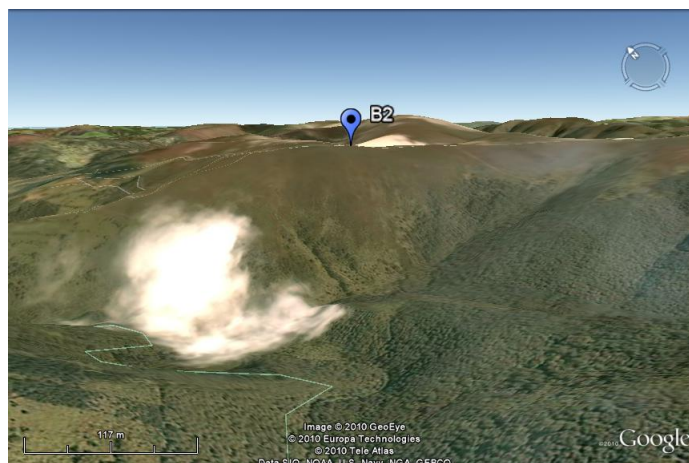


Figura 7.16: Vista de la estación B2 desde el sudeste (parque eólico de Coto Teixido).

Denotaremos a la dirección del viento por Θ y a la concentración de SO_2 por R y supondremos que la densidad conjunta de ambas variables es de la forma (7.33). **El objetivo es estimar la densidad conjunta y establecer sus conjuntos de nivel.** Esto se hace

aplicando el Algoritmo 7.3.

La estimación de la densidad del dióxido de azufre la implementaremos mediante el ajuste por máxima verosimilitud de una distribución de Weibull⁵, al observarse que el histograma tiene la forma de una densidad exponencial. La función de log-verosimilitud para la densidad Weibull es:

$$\log L(\lambda, k) = n(\log k - k \log \lambda) + (k - 1) \sum_{i=1}^n \log(X_i) - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad (7.46)$$

Maximizando en (λ, k) se obtienen los parámetros de máxima verosimilitud:

$$\hat{\lambda}_{MV} = 1.3694 \text{ y } \hat{k}_{MV} = 0.8702 \quad (7.47)$$

Esto se puede hacer fácilmente con la función `fitdistr` del paquete MASS. El ajuste se puede comprobar gráficamente con la Figura 7.17.

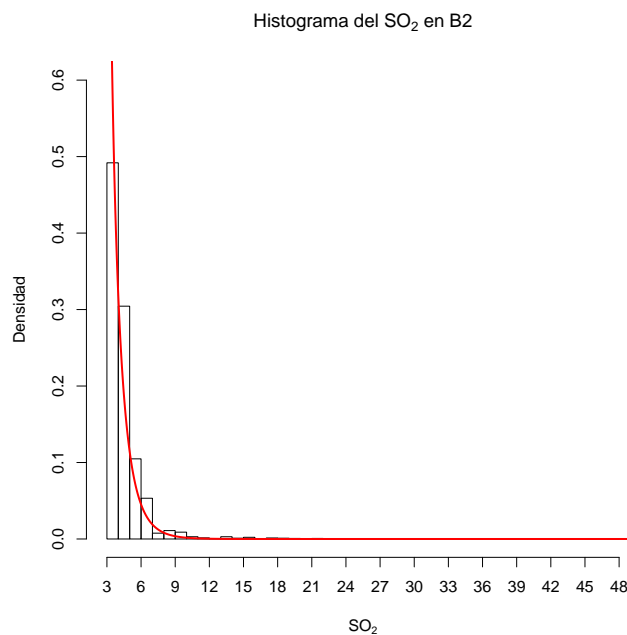


Figura 7.17: Ajuste del SO₂ en la estación B2 por $We(\hat{\lambda}_{MV}, \hat{k}_{MV})$.

La densidad del viento la estimaremos mediante mixturas de von Mises y distribuciones STNN. Para la densidad von Mises, hay que maximizar la función de log-verosimilitud

$$\log L(\mu, \kappa) = -n \log(2\pi I_0(\kappa)) + \kappa \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu) \quad (7.48)$$

⁵Distribución que generaliza a la exponencial y cuya densidad es $f(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}$.

sujeta a las restricciones $0 \leq \mu \leq 2\pi$ y $\kappa \geq 0$, lo cual es sencillo de programar y está implementado en el paquete `circular`. Más complicado es estimar por máxima verosimilitud los parámetros de una mezcla de p von Mises:

$$f_{\vec{\mu}, \vec{\kappa}, \vec{\alpha}}(\theta) = \sum_{j=1}^p \alpha_j f_{\mu_j, \kappa_j}(\theta), \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1. \tag{7.49}$$

En este caso la log-verosimilitud es

$$\log L(\vec{\mu}, \vec{\kappa}, \vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j f_{\mu_j, \kappa_j}(\theta_i) \right) \tag{7.50}$$

y su maximización está sujeta a las restricciones $0 \leq \mu_i \leq 2\pi, k_i \geq 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ y $\sum_{i=1}^p \alpha_i \leq 1$ (no es necesario exigir la igualdad, siempre se va a alcanzar en el máximo). Estas restricciones se pueden expresar matricialmente, lo cual es muy interesante para poder optimizar (7.49) con la función `constrOptim`.

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline -I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \cdots -1 \\ & & I_p \end{array} \right)_{(4p+1) \times 3p} \cdot \left(\begin{array}{c} \vec{\mu} \\ \vec{\kappa} \\ \vec{\alpha} \end{array} \right)_{3p \times 1} \geq \left(\begin{array}{c} \vec{0} \\ (-2\pi) \\ \vec{0} \\ -1 \\ \vec{0} \end{array} \right)_{(4p+1) \times 1} \tag{7.51}$$

Las distribuciones de sumas trigonométricas no negativas son más complicadas y costosas de estimar por máxima verosimilitud. Para calcular sus parámetros se usa la función `nntsestimation` del paquete `CircNNTSR`.

En la Tabla 7.4 se recogen los parámetros para mezclas de hasta 5 von Mises y distribuciones de STNN de hasta 5 términos. Las distintas densidades están representadas en la Figura 7.18, en la que se observa que las sumas trigonométricas no negativas presentan problemas de ajuste. En primer lugar, no se adaptan a la rápida variación del histograma, debido a que las funciones trigonométricas son muy regulares. Por tanto, para conseguir que se adapten a los datos hay que aumentar considerablemente el número de términos M , lo que reduce su eficacia y dispara el coste computacional. En segundo lugar, las distribuciones de STNN tienen el carácter ondulatorio típico de las funciones trigonométricas, un problema cuando las ondulaciones no coinciden con observaciones (por ejemplo, entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π).

En cambio, las mezclas de von Mises se comportan muy bien, gracias a que su densidad (7.22) permite una gran variación. Como la mezcla de 4 von Mises es la que parece que

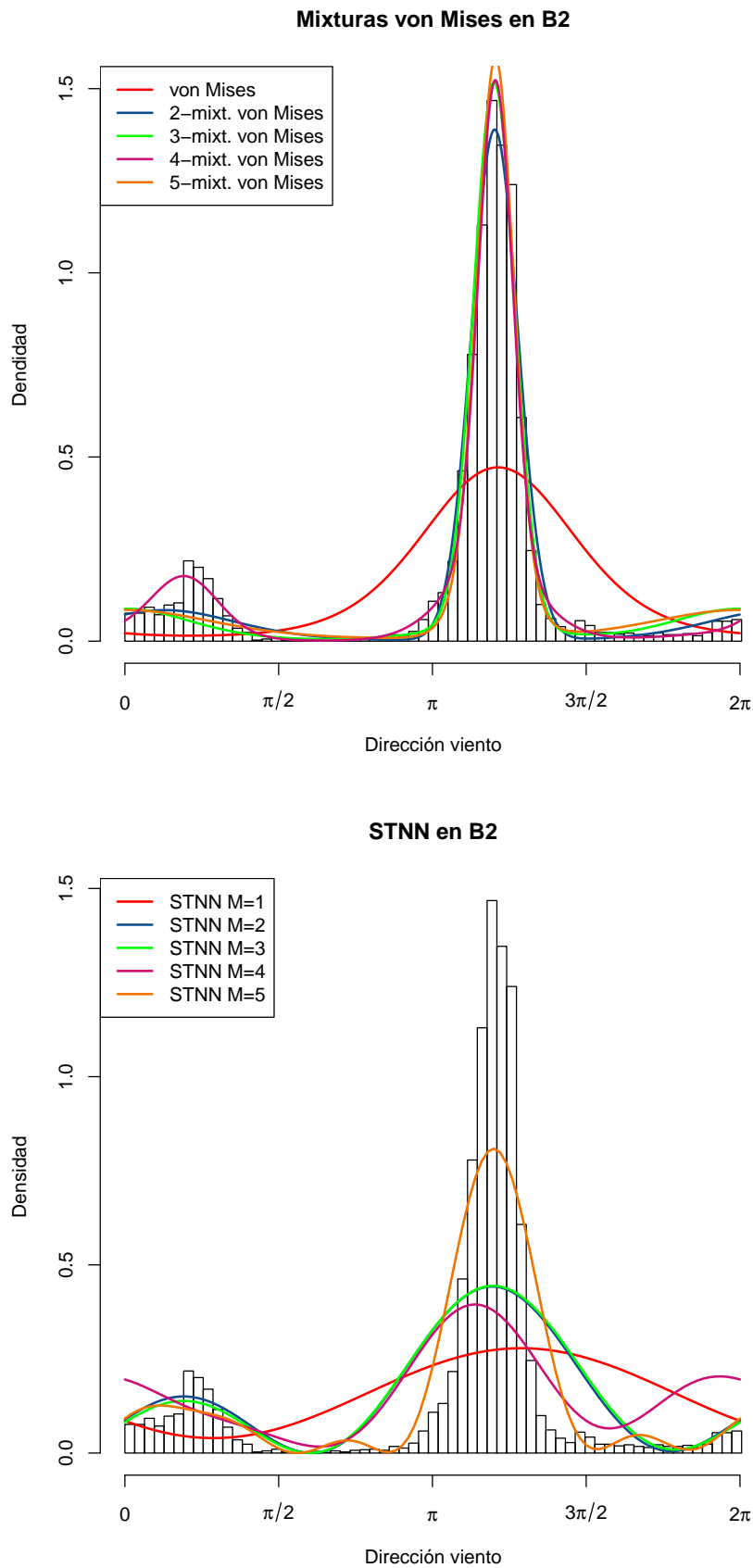


Figura 7.18: Estimaciones por mixturas de von Mises y STNN de la densidad de la dirección del viento.

da un mejor ajuste, al captar las observaciones entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ mejor, la elegimos como la densidad de la dirección del viento en B2.

Mixturas de p von Mises				STNN de M términos		
p	$\hat{\mu}_{MV}$	$\hat{\kappa}_{MV}$	$\hat{\alpha}_{MV}$	M	\hat{a}_{kMV}	\hat{b}_{kMV}
1	3.8118	1.7265	1	1	-0.2314	-0.2951
2	3.7776	17.7688	0.8308	2	-0.3729	-0.2674
	0.4040	1.8866	0.1691		0.1521	0.4037
3	3.6483	2.6035	0.0573	3	-0.3851	-0.2877
	3.7714	22.7249	0.7836		0.1417	0.3909
	6.2831	2.2453	0.1590		0.0000	0.0000
4	3.7850	33.3939	0.5688	4	-0.1746	-0.2142
	0.6141	8.7038	0.1390		0.3018	0.2042
	0.0002	2.0405	0.0428		-0.0128	-0.1429
	3.7419	5.0543	0.2492		0.0000	0.0000
5	3.7663	26.8120	0.4069	5	-0.4641	-0.3624
	6.2831	0.3616	0.0000		0.2250	0.6274
	6.2831	1.2336	0.2201		0.1161	-0.3447
	3.7600	10.9083	0.1323		-0.2232	0.1828
	3.8085	36.3269	0.2404		0.1346	0.0043

Tabla 7.4: Parámetros para las mixturas de von Mises y distribuciones de STNN.

Ahora que tenemos estimadas las densidades marginales, construimos la muestra artificial calculando las distribuciones marginales, algo que es sencillo porque la lineal es una Weibull y la circular una mixtura de von Mises. La estimación de g se hace con la densidad núcleo von Mises considerado **tres ventanas**: $\kappa = 10$ (sobresuavizado), $\kappa = 100$ (ajuste razonable) y $\kappa = 1000$ (infrasuavizado). Con ellas se pretende dar una idea del efecto de la elección de la ventana en la densidad conjunta y en la cópula.

Una elección más apropiada de la ventana se obtendría con validación cruzada mínimo cuadrática o máximo verosímil. Sin embargo, a la hora de implementarlas surgen varios problemas, como es la presencia de valores repetidos⁶ que sugieren valores de la ventana muy grandes (gran infrasuavizado). Otro problema es la evaluación del cociente entre la exponencial de la densidad von Mises y la función modificada de Bessel $I_0(\cdot)$, que crece exponencialmente.

En la Figura 7.20 se presentan las gráficas de la densidad conjunta y los conjuntos de nivel para las tres ventanas elegidas. En los conjuntos de nivel se ha reducido la escala del dióxido de azufre para que se vean mejor. Se observa claramente la influencia de las direcciones noreste (menor) y sudeste (mayor) en la concentración del SO_2 y que la regularidad desciende cuando aumenta la ventana.

⁶La elección mínimo cuadrática puede ser inconsistente.

Una representación análoga para las densidades de las cópulas está en la Figura 7.21, en la que se observa claramente como afecta la ventana a la regularidad de la densidad de la cópula. También se ve una característica muy interesante, la simetría en la dirección $u = v$. Se debe la estructura de la densidad de la cópula (7.37), en la que los puntos (u, v) tales que $v = c - u$, con $-1 \leq c \leq 1$ dan lugar al mismo valor $2\pi g(2\pi c)$.

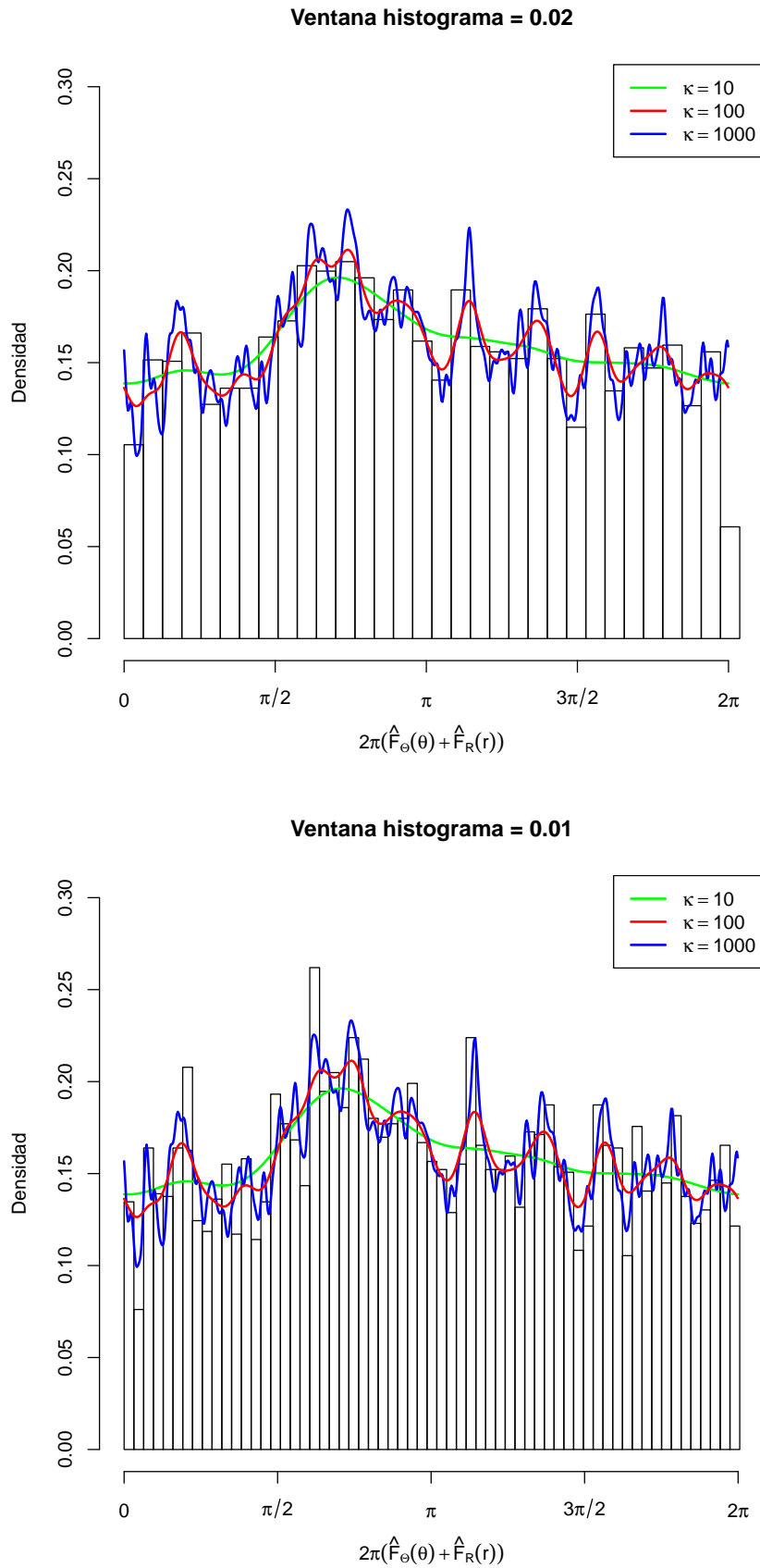


Figura 7.19: Estimación no paramétrica de g para tres ventanas.

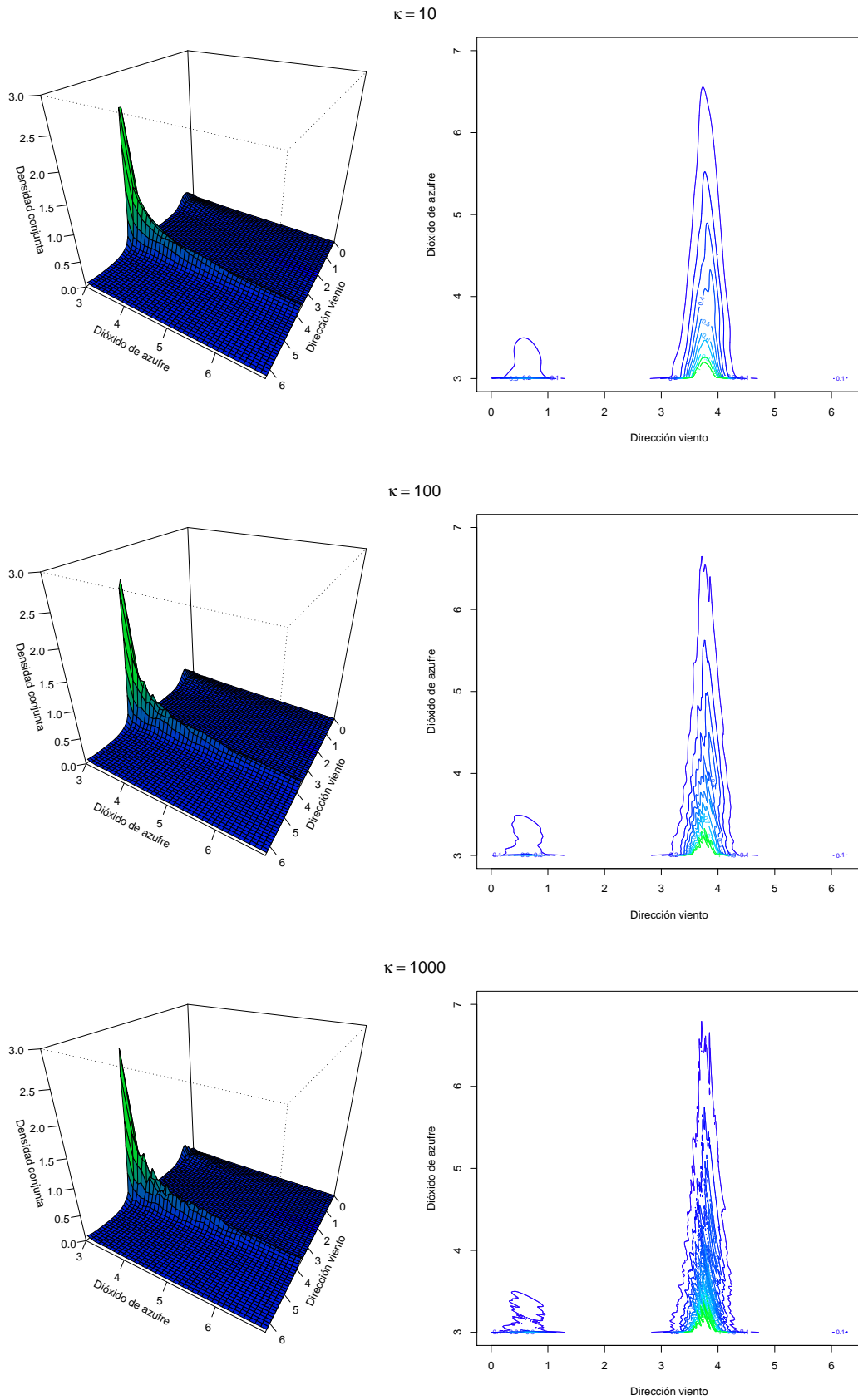


Figura 7.20: Densidad y conjuntos de nivel de $\hat{f}_{\Theta,R}$ para las ventanas $\kappa = 10, 100, 1000$.

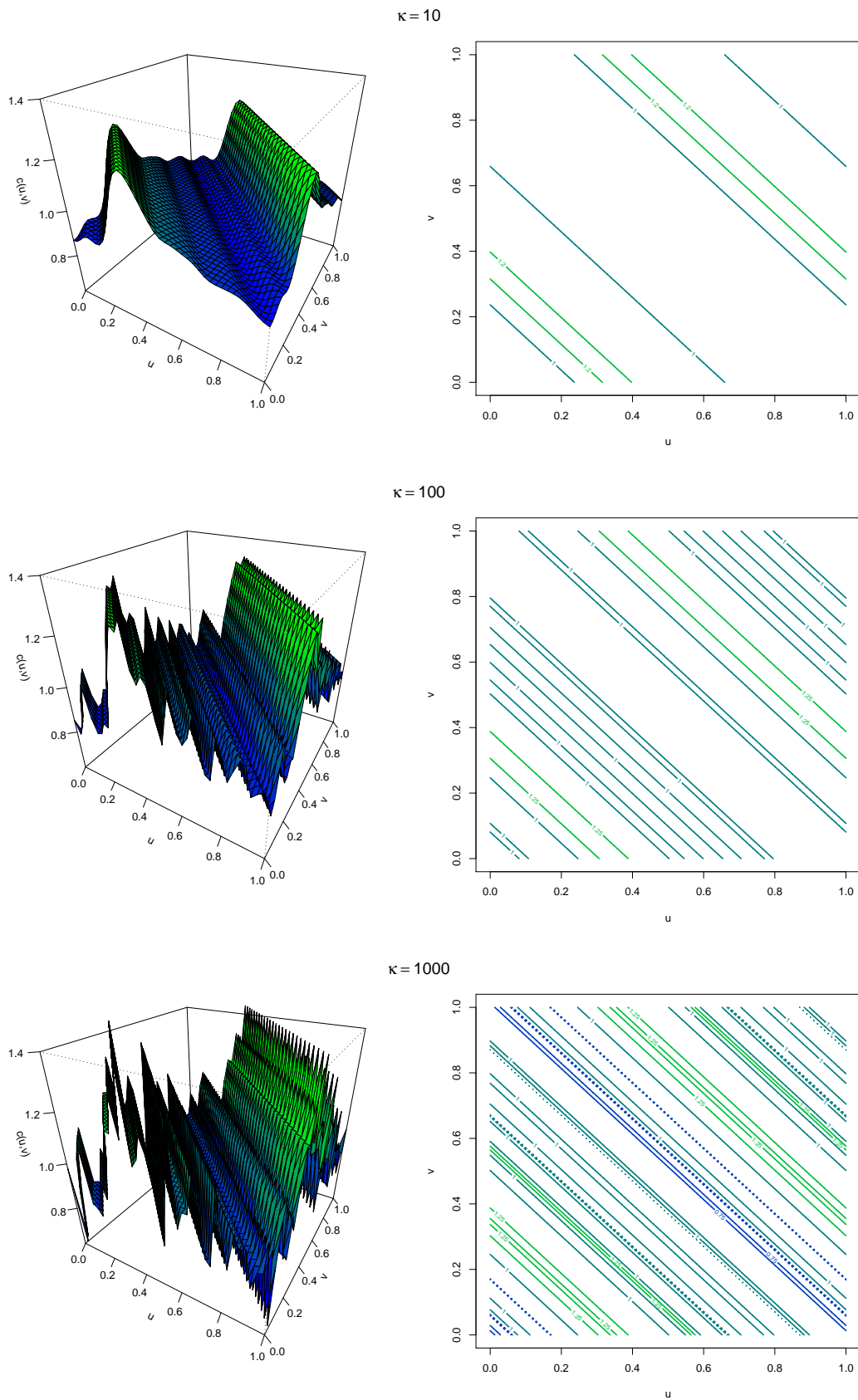


Figura 7.21: Densidad y conjuntos de nivel de $\hat{c}_{\Theta,R}$ para las ventanas $\kappa = 10, 100, 1000$.

Capítulo 8

Catálogo de cópulas

Algo habitual en los artículos y libros sobre cópulas es mostrar en una tabla distintas cópulas notables, acompañadas por ciertos parámetros de interés como la Tau de Kendall o la Rho de Spearman. Buen ejemplo de ello son las referencias [59, 36, 32, 27, 78, 4]. En especial, Nelsen [59] recoge una lista de 22 cópulas Arquimedianas y Joe [36] proporciona dos listas de cópulas: con un parámetro (lista B) y con dos (lista BB).

Las entradas relacionadas con cada cópula varían de un autor a otro, pero casi todas son incompletas en algún punto. Debido a esto, parece interesante contar con un catálogo lo más completo posible al que poder referirse para consultas básicos, con ciertas entradas que no se suelen considerar habitualmente (como λ_U y λ_L). La estructura del catálogo es la siguiente:

Cópulas no Arquimedianas (Tablas 8.1–8.6): Las tablas tienen las siguientes entradas: Familia de cópulas, Expresión de C , Rango de los parámetros, Casos particulares, Tau de Kendall, Rho de Spearman, λ_U , λ_L y Densidad / Componente singular. En la última entrada, en caso de que la cópula tenga componente singular, se especificará su dominio y se dará su probabilidad.

Cópulas Arquimedianas (Tablas 8.7–8.14): Las tablas tienen las siguientes entradas: Familia de cópulas, Expresión de C , Generador, Rango de los parámetros, Estricta, Casos particulares, Tau de Kendall, Rho de Spearman, λ_U , λ_L .

En ambos casos, las tablas se dividen en dos, la parte A y la B. Para acortar las expresiones, usamos ciertas notaciones. Las siguientes se repetirán a menudo:

- $\tilde{u} = -\log u$ y $\tilde{v} = -\log v$.
- $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$ denota la cópula $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$, que aparece a menudo como caso particular.
- Pondremos * cuando una expresión es muy complicada o no admita forma cerrada.

Tabla 8.1: Cópulas no Arquimedianas 1A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Rango parámetros	Casos particulares	Tau de Kendall	Rho de Spearman
M	$\min(u, v)$	—	—	1	1
Normal (B1)	$\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))^a$	$-1 < \rho < 1$	$C_{-1} = W$ $C_0 = \Pi$ $C_1 = M$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$
t_{ν} -Student ^b	$T_{\rho, \nu}(T_\nu^{-1}(u), T_\nu^{-1}(v))^c$	$-1 < \rho < 1$	$C_{-1} = W$ $C_0 = \Pi$ $C_1 = M$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	*
Farlie-Gumbel-Morgenstern (B10)	$uv + \theta uv(1-u)(1-v)$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$C_0 = \Pi$	$\frac{2\theta}{9}$	$\frac{\theta}{3}$
Marshall-Olkin	$\min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta})$	$0 < \alpha, \beta < 1$	$C_{0,0} = \Pi$ $C_{1,1} = M$ $C_{\theta,\theta} = C6$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}$	$\frac{3\alpha\beta}{2\alpha-\alpha\beta+2\beta}$
Cuadras-Augé (B12)	$[\min(u, v)]^\theta [uv]^{1-\theta}$	$0 \leq \theta \leq 1$	$C_0 = \Pi$ $C_1 = M$	$\frac{\theta}{2-\theta}$	$\frac{3\theta}{4-\theta}$
Plackett (B2)	$\begin{cases} \frac{[1+(\theta-1)(u+v)] - \sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2 - 4uv\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}, & \theta \neq 1 \\ uv, & \theta = 1 \end{cases}$	$\theta > 0$	$C_0 = W$ $C_1 = \Pi$ $C_\infty = M$	*	$\frac{\theta+1}{\theta-1} - \frac{2\theta}{(\theta-1)^2} \log \theta$

^a Φ_ρ es la distribución de la normal bivariente tipificada, con correlación ρ . La expresión desarrollada es $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left(-\frac{(s^2-2\rho st+t^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dt ds$.

^bSi $\nu = 1$, la cópula se conoce como **cópula de Cauchy**.

^c $T_{\rho, \nu}$ es la distribución de la t de Student bivariente tipificada, con correlación ρ y ν grados de libertad. La expresión desarrollada es

$$\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(v)} \left(1 + \frac{s^2-2\rho st+t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dt ds.$$

Tabla 8.2: Cópulas no Arquimedianas 1B.

Familia	λ_U	λ_L	Densidad / Componente singular	Número
M	1	1	$v = u$, con prob. 1	C1
Normal (B1)	0	0	$\frac{\phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\phi(\Phi^{-1}(u))\phi(\Phi^{-1}(v))}$ ^a	C2
t_ν -Student	$2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	$2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	$\frac{t_{\rho,\nu}(T_\nu^{-1}(u), T_\nu^{-1}(v))}{t_\nu(T_\nu^{-1}(u))t_\nu(T_\nu^{-1}(v))}$ ^b	C3
Farlie-Gumbel -Morgenstern (B10)	0	0	$1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)$	C4
Marshall-Olkin	$\min(\alpha, \beta)$	0	$u^\alpha = v^\beta$, con prob. $\frac{\alpha\beta}{\alpha-\alpha\beta+\beta}$	C5
Cuadras-Augé (B12)	θ	0	$u = v$, con prob. $\frac{\theta}{2-\theta}$	C6
Plackett (B2)	0	0	$\left[(1 + \delta(u+v))^2 - 4\theta\delta uv \right]^{-\frac{3}{2}} [1 + \delta(u+v - 2uv)]^c$	C7

^aSi $x = \Phi^{-1}(u)$ e $y = \Phi^{-1}(v)$, la expresión desarrollada es $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-\rho(\rho x^2 + 2xy + \rho y^2)}{2(1-\rho^2)}\right)$.

^bSi $x = T_\nu^{-1}(u)$ e $y = T_\nu^{-1}(v)$, la expresión desarrollada es $\frac{\nu}{2\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}\right)^2 \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \left[\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)\left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)\right]^{\frac{\nu+1}{2}}$.

^cCon $\delta = \theta - 1$.

Tabla 8.3: Cópulas no Arquimedianas 2A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Rango parámetros	Casos particulares	Tau de Kendall	Rho de Spearman
Raftery (B9)	$M(u, v) + \frac{1-\theta}{1+\theta} (uv)^{\frac{1}{1-\theta}} \left\{ 1 - [\max(u, v)]^{-\frac{1+\theta}{1-\theta}} \right\}^a$	$0 \leq \theta \leq 1$	$C_0 = \Pi$ $C_1 = M$	$\frac{2\theta}{3-\theta}$	$\frac{\theta(4-3\theta)}{(2-\theta)^2}$
Galambos (B7)	$uv \exp \left(((-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta)^{-\frac{1}{\theta}} \right)$	$\theta \geq 0$	$C_0 = \Pi$ $C_\infty = M$	*	*
Hüsler y Reiss (B8)	$\exp \left[-\tilde{u}\Phi \left(\theta^{-1} + \frac{\theta}{2} \log \left(\frac{\tilde{u}}{v} \right) \right) - \tilde{v}\Phi \left(\theta^{-1} + \frac{\theta}{2} \log \left(\frac{\tilde{v}}{u} \right) \right) \right]$	$0 \leq \theta \leq 1$	$C_0 = \Pi$ $C_1 = M$	*	*
Fréchet	$\alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v) + \beta W(u, v)$	$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ $\alpha + \beta \leq 1$	$C_{0,0} = \Pi$ $C_{0,1} = W$ $C_{1,0} = M$ $C_{-1} = W$ $C_0 = \Pi$ $C_1 = M$	$\frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2\beta - \beta^2}{3}$	$\alpha - \beta$
Mardia	$\frac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u, v) + (1 - \theta^2) \Pi(u, v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u, v)$	$-1 \leq \theta \leq 1$		$\frac{2\theta^3 + \theta^5}{3}$	θ^3
R.-Lallena y U.-Flores [66]	$uv + \theta f(u)g(v)$	f, g, θ con ciertas condiciones ^b	$f(x) = g(x)$, $= x(1-x), C4$	$8 \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(r)dr$	$\frac{3\pi}{2}$

^aOtra forma equivalente es [36]: $M(u, v) + \frac{1-\theta}{1+\theta} (uv)^{\frac{1}{1-\theta}} \left\{ W(u, v)^{-\frac{\theta}{1-\theta}} - W(u, v)^{\frac{1}{1-\theta}} \right\}$.

^b f y g funciones reales definidas en \mathbb{I} tales que: i) $f(0) = f(1) = g(0) = g(1)$; ii) f y g son absolutamente continuas; iii) $\min(\alpha\delta, \beta\gamma) \geq -1$, siendo $\alpha = \inf\{f'(u) : u \in A\} < 0, \beta = \sup\{f'(u) : u \in A\} > 0, \delta = \inf\{g'(v) : v \in B\} < 0, \gamma = \sup\{g'(v) : v \in B\} > 0$, con $A = \{u \in \mathbb{I} : f'(u) \text{ existe}\}$ y $B = \{v \in \mathbb{I} : g'(v) \text{ existe}\}$.

En cuanto a $\theta, -[\max(\alpha\gamma, \beta\delta)]^{-1} \leq \theta \leq [\min(\alpha\delta, \beta\gamma)]^{-1}$

Tabla 8.4: Cópulas no Arquimedianas 2B.

Familia	λ_U	λ_L	Densidad / Componente singular	Número
Raftery (B9)	0	$\frac{2\theta}{\theta+1}$	$(1 - \theta^2)^{-1} M(u, v)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \left\{ \theta W(u, v)^{-\frac{1}{1-\theta}} + W(u, v)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right\}$	C8
Galambos (B7)	$2 - 2\frac{1}{\theta}$	0	$\frac{C_{\theta}(u, v)}{uv} \left[1 - \tilde{w}^{-1-\frac{1}{\theta}} \tilde{z} + \tilde{w}^{-2-\frac{1}{\theta}} (\tilde{u}\tilde{v})^{-\theta-1} \left\{ 1 + \theta + \tilde{w}^{-\frac{1}{\theta}} \right\} \right]^a$	C9
Hüsler y Reiss (B8)	$2 - 2\Phi\left(\frac{1}{\theta}\right)$	0	$\frac{C_{\theta}(u, v)}{uv} \left[\Phi\left(\theta^{-1} - \frac{\theta}{2} \log \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right) \Phi(z) + \frac{\theta}{2} \tilde{v}^{-1} \phi(z) \right]^b$	C10
Fréchet	α	α	$v = u$, con prob. α y $v = 1 - u$ con prob. β ^c	C11
Mardia	$\frac{\theta^2(1+\theta)}{2}$	$\frac{\theta^2(1+\theta)}{2}$	$v = u$, con prob. $\frac{\theta^2(1+\theta)}{2}$ y $v = 1 - u$ con prob. $\frac{\theta^2(1-\theta)}{2}$ ^d	C12
R.-Lallena y U.-Flores [66]	$-f(1) [f'(1) + g'(1)]$	$f(0) [f'(0) + g'(0)]$	$1 + f'(u)g'(v)$	C13

^aSiendo $\tilde{w} = \tilde{u}^{-\theta} + \tilde{v}^{-\theta}$ y $\tilde{z} = \tilde{u}^{-\theta-1} + \tilde{v}^{-\theta-1}$.

^b $z = \theta^{-1} + \frac{\theta}{2} \log \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$.

^cSi $\alpha = \beta = 0$, es absolutamente continua con densidad 1.

^dSi $\theta = 0$, es absolutamente continua con densidad 1.

Tabla 8.5: Cópulas no Arquimedianas 3A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Rango parámetros	Casos particulares	Tau de Kendall	Rho de Spearman
Cúbicas en u, y, v	$uw + wv(1-u)(1-v) [A_1v(1-u) + A_2(1-v)(1-u) + B_1uv + B_2u(1-v)]$	A_1, A_2, B_1, B_2 , según Teorema 3.7 ^a	—	$\frac{A_1 + A_2 + B_1 + B_2}{12}$	$\frac{A_1 + A_2 + B_1 + B_2}{18} + \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{450}$
BB4	$[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 - \{(u^{-\theta} - 1)^{-\delta} + (v^{-\theta} - 1)^{-\delta}\}^{-\frac{1}{\delta}}]^{-\frac{1}{\delta}}$	$\theta \geq 0$ $\delta > 0$	$C_{\theta, \infty} = M$ $C_{\infty, \delta} = M$ $C_{0, \delta} = B4$ $C_{\theta, 0} = B7$	*	*
BB5	$\exp \left\{ - \left[\tilde{u}^\theta + \tilde{v}^\theta - (\tilde{u}^{-\theta\delta} + \tilde{v}^{-\theta\delta})^{-\frac{1}{\delta}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$\theta \geq 1$ $\delta > 0$	$C_{\theta, \infty} = C_{\infty, \delta} = M$ $C_{1, \delta} = B7$ $C_{\theta, 0} = B6$	*	*

^a $(A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_1, A_1)$ y (A_2, B_2) están en $S = \{(x, y) \in [-1, 2] \times [-2, 1] : x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0\}$.

Tabla 8.6: Cópulas no Arquimedianas 3B.

Familia	λ_U	λ_L	Densidad / Componente singular	Número
Cúbicas en u y v	0	0	$[B_1(2 - 3u)u + A_1(1 - u)(1 - 3u)](2 - 3v)v$ $+ B_2u(2 - 3u)(1 - v) + A_2(1 - u)(1 - 3u)(1 - v)(1 - 3v)$	C14
BB4	$2^{-\frac{1}{\delta}}$	$\left(2 - 2^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}}$	$*^a$	C15
BB5	$2 - \left(2 - 2^{-\frac{1}{\delta}}\right)^{\frac{1}{\delta}}$	0	$*^a$	C16

^aLas expresiones son evaluables pero demasiado largas. Se pueden calcular usando un software de cálculo simbólico, por ejemplo *Mathematica*.

Tabla 8.7: Cópulas Arquimedianas 1A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Generador	Rango parámetros	Estricta	Casos particulares
Π	uv	$-\log t$	$—$	Sí	$—$
W	$\max(u + v - 1, 0)$	$1 - t$	$—$	No	$—$
Clayton (N1, B4)	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$	$\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\theta \geq 0$	$C_{-1} = W$ $C_0 = \Pi$ $C_1 = \Sigma_{\Pi}$ $C_{\infty} = M$
Gumbel (N4, B6)	$\exp\left(-\left[(-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$(-\log t)^{\theta}$	$\theta \geq 1$	Sí	$C_1 = \Pi$ $C_{\infty} = M$
Frank (N5, B3)	$-\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)}\right)$	$-\log\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$	$\theta \neq 0$	Sí	$C_{-\infty} = W$ $C_0 = \Pi$ $C_{\infty} = M$
Ali-Mikhail-Haq (N3)	$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$	$\log \frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$-1 \leq \theta < 1$	Sí	$C_0 = \Pi$ $C_1 = M$
Gumbel-Barnett (N9)	$uv \exp(-\theta \log u \log v)$	$\log(1 - \theta \log t)$	$0 < \theta \leq 1$	Sí	$C_0 = \Pi$
Log-cópula (N13)	$\exp\left(1 - \left[(1 - \log u)^{\theta} + (1 - \log v)^{\theta} - 1\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$(1 - \log t)^{\theta} - 1$	$\theta > 0$	Sí	$C_1 = \Pi$ $C_{\infty} = M$
Joe (N6, B5)	$1 - \left[(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}$	$-\log[1 - (1-t)^{\theta}]$	$\theta \geq 1$	Sí	$C_1 = W$ $C_{\infty} = M$

Tabla 8.8: Cópulas Arquimedianas 1B.

Familia	Tau de Kendall	Rho de Spearman	λ_U	λ_L	Número
Π	0	0	0	0	A1
W	-1	-1	0	0	A2
Clayton (N1, B4)	$\frac{\theta}{\theta+2}$	*	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	A3
Gumbel (N4, B6)	$\frac{\theta}{\theta+1}$	*	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A4
Frank (N5, B3)	$1 + 4\frac{D_1(\theta)-1}{\theta}$	$1 - \frac{12}{\theta} [D_2(-\theta) - D_1(-\theta)]$	0	0	A5
Ali-Mikhail-Haq (N3)	$\frac{3\theta-2}{3\theta} - \frac{2}{3} (1 - \frac{1}{\theta})^2 \log(1 - \theta)$	$\frac{12(1+\theta)}{\theta^2} \text{dilog}(1 - \theta) - \frac{24(1-\theta)}{\theta^2} - \frac{3(\theta+12)}{\theta} b$	0	0	A6
Gumbel-Barnet (N9)	$e^{\frac{2}{\theta}} \text{Ei}(-\frac{2}{\theta})$	$-3 - \frac{12e^{\frac{4}{\theta}} \text{Ei}(-\frac{4}{\theta})}{\theta} c$	0	0	A7
Log-cópula (N13)	$\frac{(1-\theta)(-1+2e^2 \text{E}_\theta(2))}{\theta} d$	*	0	0	A8
Joe (N6, B5)	*	*	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A9

^a $D_k(x)$ es la función de Debye, definida para cualquier entero k por $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t-1} dt$.

^b $\text{dilog}(x)$ es la función *dilogaritmo* definida como $\text{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\log t}{1-t} dt$.

^c Ei es la integral exponencial $\text{Ei}(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

^d E_n es la n -integral exponencial, $\text{E}_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt$.

Tabla 8.9: Cópulas Arquimedianas 2A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Generador	Rango parámetros	Estricta	Casos particulares
N2	$\max\left(1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right)$	$(1-t)^\theta$	$\theta \geq 1$	No	$C_1 = W$ $C_\infty = M$
N7	$\max(\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0)$	$-\log[\theta t + (1-\theta)]$	$0 < \theta \leq 1$	No	$C_0 = W$ $C_1 = \Pi$
N8	$\max\left(\frac{\theta^2 uv - (1-u)(1-v)}{\theta^2 - (\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right)$	$\frac{1-t}{1+(\theta-1)t}$	$\theta \geq 1$	No	$C_1 = W$ $C_\infty = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$
N10	$\frac{uv}{[1+(1-u^\theta)(1-v^\theta)]^{\frac{1}{\theta}}}$	$\log(2t^\theta - 1)$	$0 < \theta \leq 1$	Sí	$C_0 = \Pi$
N11	$[\max(u^\theta v^\theta - 2(1-u^\theta)(1-v^\theta), 0)]^{\frac{1}{\theta}}$	$\log(2 - t^\theta)$	$0 < \theta \leq \frac{1}{2}$	No	$C_0 = \Pi$
N12	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})^{-1}$	$(\frac{1}{t} - 1)^\theta$	$\theta \geq 1$	Sí	$C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ $C_\infty = M$
N14	$(1 + [(u^{-\frac{1}{\theta}} - 1)^\theta + (v^{-\frac{1}{\theta}} - 1)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})^{-\theta}$	$(t^{-\frac{1}{\theta}} - 1)^\theta$	$\theta \geq 1$	Sí	$C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ $C_\infty = M$
N15	$\left\{ \max\left(1 - \left[(1-u^{\frac{1}{\theta}})^\theta + (1-v^{\frac{1}{\theta}})^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right) \right\}^\theta$	$(1 - t^{\frac{1}{\theta}})^\theta$	$\theta \geq 1$	No	$C_1 = W$ $C_\infty = M$
N16	$\frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 + 4\theta})$, $S = u + v - 1 - \theta(u^{\frac{1}{\theta}} + v^{\frac{1}{\theta}} - 1)$	$(\frac{\theta}{t} + 1)(1-t)$	$\theta \geq 0$	$\theta > 0$	$C_0 = W$ $C_\infty = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$

Tabla 8.10: Cópulas Arquimedianas 2B.

Familia	Tau de Kendall	Rho de Spearman	λ_U	λ_L	Número
N2	$1 - \frac{2}{\theta}$	*	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A10
N7	$\frac{2(-1+\theta)(\theta - (-1+\theta)\log(1-\theta))}{\theta^2}$	*	0	0	A11
N8	$\frac{-4+\theta}{3\theta}$	*	0	0	A12
N10	$\frac{\theta - 2\theta \cdot {}_2F_1(1, 1, \frac{2+\theta}{\theta}, -1)}{2+\theta} a$	*	0	0	A13
N11	$1 + \frac{{}_2 \cdot {}_2F_1(1, 1, 2 + \frac{2}{\theta}, -1)}{2+\theta} + \frac{{}_4 \cdot {}_2F_1(1, 1, \frac{2+\theta}{\theta}, -1)}{-2+\theta} a$	*	0	0	A14
N12	$1 - \frac{2}{3\theta}$	*	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A15
N14	$1 - \frac{2}{1+2\theta}$	*	$\frac{1}{2}$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A16
N15	$1 + \frac{2}{1-2\theta}$	*	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A17
N16	$-1 + 4\theta - 4(-1 + \theta)\sqrt{\theta} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right) + 4\theta \log \theta - 4\theta \log(1 + \theta)$	*	$\frac{1}{2}$	0	A18

^a ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica definida por ${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$, siendo $(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$.

Tabla 8.11: Cópulas Arquimedianas 3A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Generador	Rango parámetros	Estricta	Casos particulares
N17	$\left(1 + \frac{[(1+u)^{-\theta}-1][(1+v)^{-\theta}-1]}{2^{-\theta}-1}\right)^{-\frac{1}{\theta}} - 1$	$-\log\left(\frac{(1+t)^{-\theta}-1}{2^{-\theta}-1}\right)$	$\theta \neq 0$	Sí	$C_{-1} = \Pi$ $C_{\infty} = M$
N18	$\max\left(1 + \theta \left[\log\left(e^{\frac{\theta}{u-1}} + e^{\frac{\theta}{v-1}}\right)\right]^{-1}, 0\right)$	$e^{\frac{\theta}{t-1}}$	$\theta \geq 2$	No	$C_{\infty} = M$
N19	$\theta \left[\log\left(e^{\frac{\theta}{u}} + e^{\frac{\theta}{v}} - e^{\theta}\right)\right]^{-1}$	$e^{\frac{\theta}{t}} - e^{\theta}$	$\theta > 0$	Sí	$C_0 = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ $C_{\infty} = M$
N20	$[\log(\exp(u^{-\theta}) + \exp(v^{-\theta}) - e)]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\exp(t^{-\theta}) - e$	$\theta > 0$	Sí	$C_0 = \Pi$ $C_{\infty} = M$
N21	$1 - \left(1 - \left\{\max\left([1 - (1-u)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}} + [1 - (1-v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}}\right)$	$1 - [1 - (1-t)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}$	$\theta \geq 1$	No	$C_1 = W$ $C_{\infty} = M$
N22	$\max\left(\left[1 - (1-u^{\theta})\sqrt{1 - (1-v^{\theta})^2} - (1-v^{\theta})\sqrt{1 - (1-u^{\theta})^2}\right]^{\frac{1}{\theta}}, 0\right)$	$\arcsin(1 - t^{\theta})$	$0 < \theta \leq 1$	No	$C_0 = \Pi$
BB1	$\left[1 + \{(u^{-\theta} - 1)^{\delta} + (v^{-\theta} - 1)^{\delta}\}^{\frac{1}{\delta}}\right]^{-\frac{1}{\theta}}$	$(t^{-\theta} - 1)^{\delta}$	$\theta > 0$ $\delta \geq 1$	Sí	$C_{0,1} = \Pi$ $C_{\infty, \infty} = M$ $C_{\theta,1} = A4$
BB2	$\left[1 + \frac{1}{\delta} \log\left(e^{\delta(u^{-\theta}-1)} + e^{\delta(v^{-\theta}-1)} - 1\right)\right]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\exp\{\delta(t^{\theta} - 1)\} - 1$	$\theta > 0$ $\delta > 0$	Sí	$C_{0,\delta} = \Pi$ $C_{\infty, \infty} = M$ $C_{\theta,0} = A3$

Tabla 8.12: Cópulas Arquimedianas 3B.

Familia	Tau de Kendall	Rho de Spearman	λ_U	λ_L	Número
N17	*	*	0	0	A19
N18	$1 - \frac{4}{3\theta}$	*	0	1	A20
N19	$-\frac{1}{3} + \frac{2\theta}{3} (1 + e^\theta \theta (\text{Chi}(\theta) - \text{Shi}(\theta)))$	*	1	0	A21
N20	$1 + \frac{4(-\frac{\theta}{2+\theta} + e\Gamma(-\frac{2+\theta}{\theta}, 1))}{\theta^2}$	*	1	0	A22
N21	*	*	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	A23
N22	*	*	0	0	A24
BB1	$1 - \frac{2}{2\delta + \delta\theta}$	*	$2 - 2^{\frac{1}{\delta}}$	$2^{-\frac{1}{\delta\theta}}$	A25
BB2	*	*	0	1	A26

^aChi es la integral coseno hiperbólico: $\text{Chi}(z) = \gamma + \log(z) + \int_0^z \frac{\cosh(t)-1}{t} dt$, con γ la constante de Euler.

^bShi es la integral seno hiperbólico: $\text{Shi}(z) = \int_0^z \frac{\sinh(t)}{t} dt$.

^c $\Gamma(a, z)$ es la función Gamma incompleta: $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$.

Tabla 8.13: Cópulas Arquimedianas 4A.

Familia	Expresión $C(u, v)$	Generador	Rango parámetros	Estricta	Casos particulares
BB3	$\exp \left\{ - \left[\frac{1}{\delta} \log \left(e^{\delta u^\theta} + e^{\delta v^\theta} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\}$	$\exp \{ \delta (-\log t)^\theta \} - 1$	$\theta \geq 1$ $\delta > 0$	Sí	$C_{\theta, \infty} = C_{\infty, \delta} = M$ $C_{1, \delta} = A3$ $C_{\theta, 0} = A3$
BB6	$1 - \left(1 - \exp \left\{ - \left[(-\log(1 - \bar{u}^\theta))^\delta + (-\log(1 - \bar{v}^\theta))^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \right)^{\frac{1}{\delta}}$	$(-\log [1 - (1 - t)^\theta])^\delta$	$\theta \geq 1$ $\delta \geq 1$	Sí	$C_{\theta, \infty} = C_{\infty, \delta} = M$ $C_{1, \delta} = A4$ $C_{\theta, 1} = A9$
BB7	$1 - \left(1 - \left[(1 - \bar{u}^\theta)^{-\delta} + (1 - \bar{v}^\theta)^{-\delta} - 1 \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{\delta}}$	$[1 - (1 - y)^\theta]^{-\delta} - 1$	$\theta \geq 1$ $\delta > 0$	Sí	$C_{\theta, \infty} = C_{\infty, \delta} = M$ $C_{1, \delta} = A3$ $C_{\theta, 0} = A9$
BB8	$\frac{1}{\delta} \left[1 - \left\{ 1 - [1 - (1 - \delta)^\theta]^{-1} [1 - (1 - \delta u)^\theta] [1 - (1 - \delta v)^\theta] \right\}^{\frac{1}{\delta}} \right]$	$-\log \left(\frac{1 - (1 - \delta t)^\theta}{1 - (1 - \delta)^\theta} \right)$	$\theta \geq 1$ $0 \leq \delta \leq 1$	Sí	$C_{\theta, 0} = C_{1, \delta} = \Pi$ $C_{\theta, 1} = A9$
BB9	$\exp \left\{ - \left[(\alpha - \log u)^\theta + (\alpha - \log v)^\theta - \alpha^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} + \alpha \right\}$	$(\alpha - \log t)^\theta - \alpha^\theta$	$\theta \geq 1$ $\alpha > 0$	Sí	$C_{\theta, \infty} = C_{1, \alpha} = \Pi$ $C_{\infty, \alpha} = M$ $C_{\theta, 0} = A4$
BB10	$uv \left[1 - \theta \left(1 - u^\alpha \right) \left(1 - v^\alpha \right) \right]^{-\alpha}$	$\log \left[(1 - \theta) t^{-\frac{1}{\alpha}} + \theta \right]$	$0 \leq \theta \leq 1$ $\alpha > 0$	Sí	$C_{\theta, \infty} = \Pi$ $C_{1, 0} = M$ $C_{\theta, 0} = \Pi, 0 < \theta < 1$

Tabla 8.14: Cópulas Arquimedianas 4B.

Familia	Tau de Kendall	Rho de Spearman	λ_U	λ_L	Número
BB3	*	*	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$\begin{cases} 2^{-\frac{1}{\theta}}, & \theta = 1 \\ 1, & \theta > 1 \end{cases}$	A27
BB6	*	*	$2 - 2^{\frac{1}{\delta\theta}}$	0	A28
BB7	*	*	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	A29
BB8	*	*	$2 - 2(1 - \delta)^{\theta-1}$	0	A30
BB9	$\frac{(1-\theta)(-1+2e^{2\alpha} \alpha E_{\theta}(2\alpha))}{\theta}$	*	$2 - 2 \exp\left(-1 + \frac{1}{\theta}\right) \log 3 + (1 - 3^{\frac{1}{\theta}})\alpha$	0	A31
BB10	*	*	0	0	A32

${}^a E_n$ es la n -integral exponencial, $E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt$.

Cabe destacar que las entradas correspondientes a τ , ρ , λ_U , λ_L y densidad, cuando no estaban recogidas en la bibliografía sobre cópulas, se han calculado usando el software de cálculo simbólico *Mathematica*. Con él, los cálculos de λ_U , λ_L y la densidad de una cópula son triviales, pues sólo es necesario derivar, y siempre es posible. Sin embargo, como τ y ρ se expresan de forma general mediante una integral doble, a menudo no se pueden expresar de forma cerrada.

En este sentido, el Teorema 6.7 es de gran ayuda, pues permite reducir el cálculo al de una integral simple. El impacto de este resultado se ve en las expresiones disponibles para τ y ρ : en las cópulas no Arquimedianas suelen ir a la par, mientras que en las Arquimedianas hay muchas más disponibles para τ que para ρ .

Conclusiones

En esta tesina se ha revisado la teoría de las funciones cópula, realizando las demostraciones de la mayoría de resultados conocidos, incluido el Teorema de Sklar. Nos hemos centrado en las cópulas bidimensionales, aunque en lo posible los resultados se han extendido a las multidimensionales.

En lo que respecta a la teoría, se ha intentado tratar con la mayor claridad y rigurosidad posible, para lo que se añadió un apéndice de complementos teóricos. Como resultados destacados tenemos la relación de la dependencia perfecta con las cotas de Fréchet–Hoeffding, las componentes de una cópula, la representación canónica de la densidad y las cópulas de supervivencia. En particular, la representación canónica de la densidad permite trasladar a la estimación la mayor ventaja que ofrecen las cópulas: separar la dependencia de las marginales.

Para la construcción de cópulas se vieron los métodos de inversión, algebraicos y geométricos. En estos últimos destacan las mezclas de M , las mixturas de cópulas y las sumas ordinales. Usando las cópulas Arquimedianas se pueden construir cópulas a partir de un generador y, si la inversa del generador es una transformada de Laplace, se pueden construir cópulas Arquimedianas multivariantes. Además, se calculó la distribución de la transformación $C(U, V)$, que sirve para aplicar el método de Genest y Rivest.

Como era de esperar, las cópulas guardan una relación especial con los distintos conceptos y medidas de dependencia. En el Capítulo 6 definimos axiomáticamente las medidas de concordancia y dependencia (según la definición de Schweizer y Wolff), viendo sus propiedades, diferencias y relación con las cópulas. Se proporcionaron expresiones de ellas a partir de las cópulas (por ejemplo para la Tau de Kendall y la Rho de Spearman) y se dieron sus versiones muestrales, expresadas mediante la cópula empírica. Por último, se hizo una breve extensión de los conceptos vistos al caso multivariante.

Para recoger estos y otros resultados, se elaboró el catálogo de cópulas del Capítulo 8, una recopilación de las cópulas aparecidas en la bibliografía. Contiene 16 cópulas no Arquimedianas y 32 Arquimedianas, en las que se calculan, entre más cosas, los parámetros τ , ρ , λ_U y λ_L . Las expresiones analíticas de estos parámetros que no aparecían en la literatura

se calcularon usando *Mathematica*.

En el apartado de simulación, se proporcionaron métodos particulares y generales para simular cópulas, incluido el método de Marshall y Olkin para las cópulas Arquimedianas multidimensionales. Para implementar estos métodos se usaron los paquetes *copula* y *fCopulae* y los códigos respectivos se recogieron en el Apéndice B.

Como aplicaciones de las cópulas, vimos la relación que tienen con la regresión cuantil y la forma de estimar cópulas Arquimedianas mediante el método de Genest y Rivest. Ambos métodos los aplicamos a la exploración de un conjunto de datos sobre concentraciones de elementos químicos en el agua.

La técnica de estimación en dos etapas la utilizamos en la estimación de la densidad conjunta de una variable circular y una lineal. Estas variables son la dirección del viento y la concentración de SO_2 , medidos en las cercanías de la central térmica de As Pontes. Para la estación meteorológica estudiada, se concluyó que existía una relación entre el viento proveniente del sudeste (desde la central térmica) y la presencia de SO_2 . Además se presentaron las gráficas de la densidad, de la cópula y de los conjuntos de nivel para la elección de tres ventanas, correspondientes a la estimación no paramétrica circular de la densidad de la cópula.

A pesar del creciente interés que las cópulas han despertado, éstas tienen sus críticas y detractores. Mikosh¹ [53] recoge varias críticas y problemas que surgen al tratar con ellas. Algunas de estas críticas tienen que ver con que no hay ventajas significativas al tratar con las copulas en vez de con distribuciones multidimensionales, que existe poca teoría sobre la bondad de ajuste de cópulas y que las cópulas son modelos estáticos que no facilitan el análisis de la dependencia temporal (no encajan bien con los procesos estocásticos y series temporales). Otra crítica habitual es que es difícil seleccionar una cópula que se adapte a los datos, con que se suele escoger una familia paramétrica que se considere oportuna, de forma que el modelo resultante puede sufrir cierta arbitrariedad. Sin embargo, esta arbitrariedad también es común cuando se trabaja con distribuciones.

Es cierto que a veces trabajar con cópulas no ofrece ninguna ventaja significativa respecto a hacerlo con las distribuciones, aunque cabe matizar algunos aspectos. Las cópulas no *sustituyen* en absoluto a las distribuciones multidimensionales (con mayor bagaje y base teórica), pero sí pueden ayudar en ciertos puntos, lo que las convierte en una herramienta *complementaria* muy interesante. Por ejemplo, a la hora de construir distribuciones mul-

¹El artículo da inicio a una discusión sobre las cópulas propuesta por Thomas Mikosch en la que participan distintos expertos. Está recogida en el número especial de la revista *Extremes*, 9(1):1-62, 2006.

tivariantes: a partir de una cópula podemos obtener tantas distribuciones conjuntas como queramos, simplemente eligiendo las marginales. Los métodos vistos para la construcción de cópulas, junto a la estructura de la clase Arquimediana, proporcionan una multitud de alternativas para la construcción de distribuciones bivariantes. Para las distribuciones multivariantes, están las cópulas Arquimedianas multivariantes y las, todavía más importantes, cópulas Arquimedianas anidadas. Para estas últimas hay un algoritmo de simulación [51, 35]. Además, como se vio en el Capítulo 7, sirven para construir densidades de variables circular–lineal y circular–circular.

Por otro lado, la idea de estimación en dos etapas es sin duda muy importante (lo vimos en la estimación de los datos circulares) y abre una vía para intentar abordar el **problema de la dimensionalidad** en la estimación.

Sobre el contraste de bondad de ajuste, se han publicado varios artículos proporcionando distintos test [31, 69, 16] y es un tema de investigación en desarrollo. Por ejemplo, la regresión en mediana con error y variable explicatoria dependientes según una cópula propuesta en [6] todavía no tiene un test de bondad de ajuste.

También es un tema actual la adaptación de las cópulas para medir la dependencia temporal. En esta dirección, Nelsen [59] expresa las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov de los procesos estocásticos mediante el *producto* de cópulas.

Apéndice A

Complementos teóricos

A.1. Prueba del Lema 1.5

Lema A.1 (Extensión de una subcópula a una cópula). *Sea C' una subcópula. Entonces existe una cópula C tal que*

$$C(u, v) = C'(u, v), \forall (u, v) \in \text{Dom}C'. \quad (\text{A.1})$$

Es decir, toda subcópula puede ser extendida a una cópula. La extensión no es única generalmente.

Demostración. Sea $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2$. Vamos a extender la subcópula C' a una subcópula C'' con $\text{Dom}C'' = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ y después extenderemos C'' a una cópula C (dominio \mathbb{I}^2). En lo que sigue $\bar{}$ denotará la clausura de un conjunto y ∂ la frontera.

El primer paso es sencillo: como C' es uniformemente continua por el Teorema 1.3 y 2-creciente, podemos extender por continuidad C' a C'' :

$$\forall (u, v) \in \bar{S}_1 \times \bar{S}_2, \quad C''(u, v) := \begin{cases} C'(u, v), & (u, v) \in S_1 \times S_2 \\ \lim_{\substack{(s,t) \rightarrow (u,v) \\ (s,t) \in S_1 \times S_2}} C'(s, t), & (u, v) \in \partial S_1 \times \partial S_2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$= \lim_{\substack{(s,t) \rightarrow (u,v) \\ (s,t) \in S_1 \times S_2}} C'(s, t). \quad (\text{A.3})$$

Tal y como está definida, C'' es una subcópula:

- I. $\text{Dom}C'' = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, $S_1 \subset \bar{S}_1 \subset \mathbb{I}$ y $S_2 \subset \bar{S}_2 \subset \mathbb{I}$, con 0 y 1 pertenecientes a S_1 y S_2 .
- II. C'' es grounded al serlo C' . Para ver que C'' es 2-creciente, tenemos que comprobar que $\Delta_{u_1}^{u_2} \Delta_{v_1}^{v_2} C''(u, v) \geq 0$ para $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$. Usaremos (A.3) para compactar los

dos casos:

$$\begin{aligned} \Delta_{u_1}^{u_2} \Delta_{v_1}^{v_2} C''(u, v) &= C'''(u_2, v_2) - C'''(u_1, v_2) - C'''(u_2, v_1) + C'''(u_1, v_1) \\ &= \lim_{\substack{s_2 \rightarrow u_2 \\ t_2 \rightarrow v_2}} C'(s_2, t_2) - \lim_{\substack{s_2 \rightarrow u_2 \\ t_1 \rightarrow v_1}} C'(s_2, t_1) - \lim_{\substack{s_1 \rightarrow u_1 \\ t_2 \rightarrow v_2}} C'(s_1, t_2) + \lim_{\substack{s_1 \rightarrow u_1 \\ t_1 \rightarrow v_1}} C'(s_1, t_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como existe un $\varepsilon > 0$ tal que cuando $|u_1 - s_1|, |u_2 - s_2|, |v_1 - t_1|, |v_2 - t_2| < \varepsilon$ entonces $s_1 \leq s_2, t_1 \leq t_2$ (al ser $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$) y así podemos asegurar por ser C' 2-creciente que el C''' -volumen es positivo.

III. Se verifica para todo $(u, v) \in S_1 \times S_2$ pues en ese caso $C' = C'''$. Para $(u, v) \in \partial(S_1 \times S_2)$:

$$C'''(u, 1) = \lim_{\substack{s \rightarrow u \\ s \in S_1}} C'(s, 1) = \lim_{\substack{s \rightarrow u \\ s \in S_1}} s = u \text{ y } C'''(1, v) = \lim_{\substack{t \rightarrow v \\ t \in S_2}} C'(1, t) = \lim_{\substack{t \rightarrow v \\ t \in S_2}} t = v.$$

Vamos con el segundo paso, extender C''' a una subcópula C con dominio \mathbb{I}^2 .

Construcción de C

Sea $(u, v) \in \mathbb{I}^2$. Denotamos por a_1 y a_2 a los elementos más grande y más pequeño de \bar{S}_1 que verifiquen $a_1 \leq u \leq a_2$. Análogamente, denotaremos por b_1 y b_2 a los elementos más grande y más pequeño de \bar{S}_2 que verifiquen $b_1 \leq v \leq b_2$. Si $u \in \bar{S}_1$, entonces $a_1 = u = a_2$. Del mismo modo, si $v \in \bar{S}_2$, entonces $b_1 = v = b_2$. Con estos elementos podemos definir las funciones λ y μ :

$$\lambda(u) := \begin{cases} \frac{u-a_1}{a_2-a_1}, & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1, & \text{si } a_1 = a_2 \end{cases}, \quad \mu(v) := \begin{cases} \frac{v-b_1}{b_2-b_1}, & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1, & \text{si } b_1 = b_2 \end{cases}. \tag{A.4}$$

Notemos que las funciones λ y μ son lineales en sus argumentos y sus valores están entre 0 y 1.

Ahora podemos definir $C(u, v)$ como la interpolación entre $C'''(a_1, b_1), C'''(a_1, b_2), C'''(a_2, b_1)$ y $C'''(a_2, b_2)$ con coeficientes dados por λ y μ :

$$\begin{aligned} C(u, v) &:= [(1 - \lambda(u))(1 - \mu(v))] C'''(a_1, b_1) + [(1 - \lambda(u))] C'''(a_1, b_2) \\ &\quad + [\lambda(u)(1 - \mu(v))] C'''(a_2, b_1) + [\lambda(u)\mu(v)] C'''(a_2, b_2). \end{aligned} \tag{A.5}$$

A esta interpolación le llamaremos *interpolación bilineal*. C es una extensión de C''' , pues para $(u, v) \in \text{Dom}C'''$, $\lambda(u) = \mu(v) = 1$ y $C(u, v) = C'''(a_2, b_2) = C(u, v)$. Por lo tanto se ha construido una función $C : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ tal que $C|_{\text{Dom}C'} = C'$. Falta ver que en efecto C

así construida es una cópula.

C es una cópula

Las condiciones I y II de la Definición 1.7 se comprueban fácilmente:

- I. Para todo $u \in \mathbb{I}$, si $v = 0$, entonces $b_1 = b_2 = 0$ ($0 \in \overline{S_1}$) y $\mu(0) = 1$ con lo que $C(u, 0) = (1 - \lambda(u))C''(a_1, 0) + \lambda(u)C''(a_2, 0) = 0$. Análogamente si $v \in \mathbb{I}$ y $u = 0$.
- II. Para todo $u \in \mathbb{I}$, si $v = 1$, entonces $b_1 = b_2 = 1$ ($0 \in \overline{S_2}$) y $\mu(1) = 1$ con lo que

$$\begin{aligned}
 C(u, 1) &= (1 - \lambda(u))C''(a_1, 1) + \lambda(u)C''(a_2, 1) = (1 - \lambda(u))a_1 + \lambda(u)a_2 \\
 &= \begin{cases} \left(1 - \frac{u-a_1}{a-a_1}\right)a_1 + \frac{u-a_1}{a_2-a_1}a_2, & a_1 < a_2 \\ (1 - 1)a_1 + a_2, & a_1 = a_2 \end{cases} = \begin{cases} u, & a_1 < a_2 \\ a_2, & a_1 = a_2 \end{cases} = u.
 \end{aligned}$$

La condición de 2-creciente es más complicada de probar. Sean (a, b) y (c, d) dos puntos de \mathbb{I}^2 tales que $a \leq c$ y $b \leq d$. Asociados a (a, b) consideraremos los puntos a_1, a_2, b_1, b_2 y las funciones λ_1, μ_1 . Del mismo modo, asociados a (c, d) tenemos los puntos c_1, c_2, d_1, d_2 y las funciones λ_2, μ_2 . Tenemos que comprobar que el volumen de $B = [a, b] \times [c, d]$,

$$V_C(B) = V_C([a, c] \times [b, d]) = C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b), \tag{A.6}$$

es no negativo. En lo que sigue, denotaremos por $\lambda_1 \equiv \lambda_1(a)$, $\lambda_2 \equiv \lambda_2(c)$, $\mu_1 \equiv \mu_1(b)$ y $\mu_2 \equiv \mu_2(d)$.

Dependiendo de si existe algún punto en $\overline{S_1}$ que se encuentre estrictamente entre a y c , y de si existe algún punto en $\overline{S_2}$ que se encuentre estrictamente entre b y d , van a aparecer cuatro casos:

- I. No existe ningún punto en $\overline{S_1}$ ni en $\overline{S_2}$.
- II. No existe ningún punto en $\overline{S_1}$, pero sí en $\overline{S_2}$.
- III. Existe algún punto en $\overline{S_1}$, pero no en $\overline{S_2}$.
- IV. Existe algún punto en $\overline{S_1}$ y en $\overline{S_2}$.

El caso I es el más sencillo. Los casos II y III son un poco más complicados. El último es el más complicado con diferencia.

Caso I

Al no haber puntos de $\overline{S_1}$ entre a y c , se sigue que $a_1 = c_1$ y que $c_2 = a_2$. Del mismo

modo, $b_1 = d_1$ y $b_2 = d_2$. Por ese motivo, las expresiones de $C(c, d)$, $C(c, b)$, $C(a, d)$ y $C(a, b)$ quedan en función de $C''(a_1, b_1)$, $C''(a_1, b_2)$, $C''(a_2, b_1)$ y $C''(a_2, b_2)$:

$$\begin{aligned} V_C(B) &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) [C''(a_1, b_1) - C''(a_1, b_2) - C''(a_2, b_1) + C''(a_2, b_2)] \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \geq 0. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Al ser $a \leq c, b \leq d$ y $\lambda_i(\cdot), \mu_i(\cdot), i = 1, 2$ funciones lineales crecientes, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\mu_1 \leq \mu_2$ y los volúmenes son no negativos por ser C'' 2-creciente.

Caso II

En el caso II, $a_1 = c_1$ y $c_2 = a_2$ y la cosa se complica, porque tenemos que expresar (A.6) por $C''(a_1, d_1)$, $C''(a_1, d_2)$, $C''(a_2, d_1)$, $C''(a_2, d_2)$, $C''(a_1, b_1)$, $C''(a_1, b_2)$, $C''(a_2, b_1)$ y $C''(a_2, d_2)$. Después de agrupar y separar términos se llega a

$$\begin{aligned} V_C(B) &= (1 - \mu_1)(\lambda_2 - \lambda_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \\ &\quad + (\lambda_2 - \lambda_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)V_C([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) \geq 0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Tenemos una suma de volúmenes (rectángulos con vértices en $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$) con coeficientes no negativos, por lo que el volumen es no negativo.

Caso III

Ahora $b_1 = d_1$ y $b_2 = d_2$, y el procedimiento es análogo al anterior, resultando

$$\begin{aligned} V_C(B) &= (1 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_C([b_1, b_2] \times [a_1, a_2]) \\ &\quad + (\mu_2 - \mu_1)V_C([b_1, b_2] \times [a_2, c_1]) \\ &\quad + \lambda_2(\mu_2 - \mu_1)V_C([b_1, b_2] \times [c_1, c_2]) \geq 0. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Caso IV

Hay que sustituir los valores de $C(c, d)$, $C(c, b)$, $C(a, d)$ y $C(a, b)$ en (A.6) y conseguir descomponer y reordenar los 16 términos que aparecen para conseguir tener la siguiente expresión en volúmenes (engloba 36 evaluaciones de la subcópula C''):

$$\begin{aligned} V_C(B) &= (1 - \lambda_1)\mu_2V_C([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) \\ &\quad + \mu_2V_C([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) \\ &\quad + \lambda_2\mu_2V_C([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) \\ &\quad + (1 - \lambda_1)V_C([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + V_C([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \lambda_2 V_C([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\
 &+ (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \\
 &+ (1 - \mu_1) V_C([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) \\
 &+ \lambda_2(1 - \mu_1) V_C([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{A.10}$$

De nuevo es una suma de volúmenes con vértices en $\text{Dom}C''$, por lo tanto no negativos. Además todos los coeficientes son positivos.

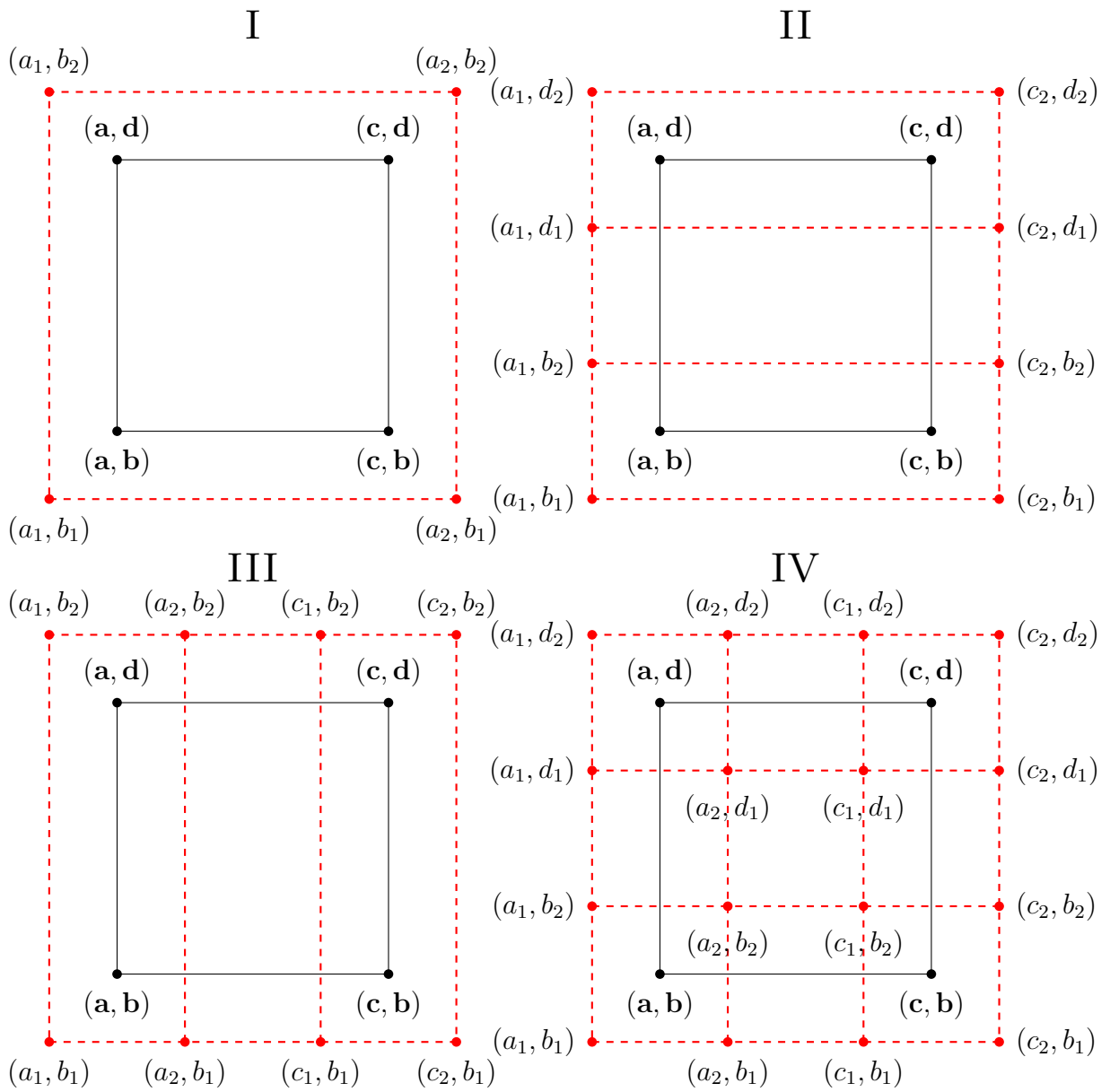


Figura A.1: Descomposición de B por casos.

Lo más interesante de este proceso es su interpretación gráfica. Los resultados obtenidos en (A.7), (A.8), (A.9) y (A.10) muestran la descomposición del volumen del rectángulo

B en 1, 3, 3 y 9 rectángulos respectivamente, según muestra la Figura A.1. □

A.2. Otra caracterización de la dependencia perfecta

Definición A.1. Un subconjunto S de $\overline{\mathbb{R}}^2$ es *no decreciente* si

$$\forall(x, y), (u, v) \in S, x < u \Rightarrow y \leq v. \tag{A.11}$$

Lema A.2 (Equivalencia con comonotonía). *Sea S un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces S es no decreciente si y sólo si para cada $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ se verifica uno de los siguientes enunciados:*

- I. $\forall(u, v) \in S, u \leq x \Rightarrow v \leq y.$
- II. $\forall(u, v) \in S, v \leq y \Rightarrow u \leq x.$

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo en ambos casos.

Supongamos que S es no decreciente y que no se verifican ni I ni II. Entonces existen puntos (a, b) y (c, d) en S tales que $a \leq x, b > y, d \leq y$ y $c > x$. Luego $a < c$ y $b > d$, lo que es una contradicción porque S es no decreciente.

Supongamos que se verifican I o II y que S es no decreciente. Entonces existen puntos de S (a, b) y (c, d) con $a < c$ y $b > d$. Para $(x, y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{b+d}{2})$ no se verifican ni (I) ni (II) con $(u, v) = (a, b)$ y $(u, v) = (c, d)$. □

Lema A.3. *Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces H es igual a su cota superior de Fréchet–Hoeffding si y sólo si para todo $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, o $\mathbb{P}\{X > x, Y \leq y\} = 0$ o $\mathbb{P}\{X \leq x, Y > y\} = 0$.*

Demostración. Si F y G son las marginales de H , entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} + \mathbb{P}\{X \leq x, Y > y\} \\ &= H(x, y) + \mathbb{P}\{X \leq x, Y > y\}, \\ G(y) &= \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} + \mathbb{P}\{X > x, Y \leq y\} \\ &= H(x, y) + \mathbb{P}\{X > x, Y \leq y\}. \end{aligned}$$

Así $H(x, y) = \min(F(x), G(y)) \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X \leq x, Y > y\} = 0$ o $\mathbb{P}\{X > x, Y \leq y\} = 0$. □

Teorema A.1. *Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces H es idénticamente igual a su cota superior de Fréchet–Hoeffding si y sólo si el soporte de H es un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^2$ no decreciente.*

Demostración. Denotemos por S el soporte de H y sea $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$. La condición I se verifica si y sólo si $\{(u, v) : u \leq x, v > y\} \cap S = \emptyset$, es decir, si y sólo si $\mathbb{P}\{X \leq x, Y > y\} = 0$. De forma semejante, I se cumple si y sólo si $\{(u, v) : u > x, v \leq y\} \cap S = \emptyset$, si y sólo si $\mathbb{P}\{X > x, Y \leq y\} = 0$. El teorema se prueba aplicando los Lemas A.2 y A.3. \square

Definición A.2. Un subconjunto S de $\overline{\mathbb{R}^2}$ es *no creciente* si

$$\forall(x, y), (u, v) \in S, x < u \Rightarrow y \geq v. \tag{A.12}$$

Lema A.4 (Equivalencia con contramonotonía). *Sea S un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}^2}$. Entonces S es no decreciente si y sólo si para cada $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$ se verifica uno de los siguientes enunciados:*

- I. $\forall(u, v) \in S, u \leq x \Rightarrow v > y$.
- II. $\forall(u, v) \in S, v > y \Rightarrow u \leq x$.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo en ambos casos.

Supongamos que S es no decreciente y que no se verifican ni I ni II. Entonces existen puntos (a, b) y (c, d) en S tales que $a \leq x, b \leq y, d > y$ y $c > x$. Luego $a < c$ y $d > b$, lo que es una contradicción porque S es no creciente.

Supongamos ahora que se verifican I o II y que S es no creciente. Entonces existen puntos de S (a, b) y (c, d) con $a < c$ y $b \geq d$. Para $(x, y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{b+d}{2})$ no se verifican ni I ni II con $(u, v) = (a, b)$ y $(u, v) = (c, d)$. \square

Lema A.5. *Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces H es igual a su cota superior de Fréchet–Hoeffding si y sólo si para todo $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$, o $\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = 0$ o $\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = 0$.*

Demostración. Si F y G son las marginales de H , entonces

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = 1 - \mathbb{P}\{X < x\} - \mathbb{P}\{Y < y\} + \mathbb{P}\{X > x, Y > y\} \\ &= F(x) + G(y) - 1 + \mathbb{P}\{X > x, Y > y\}. \end{aligned}$$

Así $H(x, y) = \max(F(x) + G(y) - 1, 0) \Leftrightarrow \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\} = 0$ o $\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = 0$. \square

Teorema A.2. *Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H . Entonces H es idénticamente igual a su cota inferior de Fréchet–Hoeffding si y sólo si el soporte de H es un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}^2}$ no creciente.*

Demostración. Denotemos por S el soporte de H y sea $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$. La condición I se verifica si y sólo si $\{(u, v) : u \leq x, v \leq y\} \cap S = \emptyset$, es decir, si y sólo si $\mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq$

$y\} = 0$. De forma semejante, I se cumple si y sólo si $\{(u, v) : u > x, v > y\} \cap S = \emptyset$, si y sólo si $\mathbb{P}\{X > x, Y > y\} = 0$. El teorema se prueba aplicando los Lemas A.4 y A.5. \square

A.3. Prueba de la Proposición 1.3

Proposición A.1. *Bajo la composición, \circ , el conjunto de operaciones de construir la cópula de supervivencia (\wedge), el dual de una cópula (\sim) y la co-cópula de una cópula dada ($*$), junto a la operación identidad (i) forman el grupo dihédrico Dih_2 de la Tabla A.1.*

\circ	i	\wedge	\sim	$*$
i	i	\wedge	\sim	$*$
\wedge	\wedge	i	$*$	\sim
\sim	\sim	$*$	i	\wedge
$*$	$*$	\sim	\wedge	i

Tabla A.1: Grupo dihédrico Dih_2 para \wedge, \sim y $*$.

Demostración. La primera fila es triviales. Notemos que la operación identidad de una cópula es dejarla como está.

Probar que se verifica la diagonal es ver que las operaciones son idempotentes:

$$\boxed{\wedge \circ \wedge = i}$$

$$\begin{aligned} \widehat{(\tilde{C}(u, v))} &= u + v - 1 + \widehat{C}(1 - u, 1 - v) \\ &= u + v - 1 + (1 - u) + (1 - v) - 1 + C(u, v) = C(u, v), \end{aligned}$$

$$\boxed{\sim \circ \sim = i}$$

$$\widetilde{(\tilde{C}(u, v))} = u + v - \tilde{C}(u, v) = u + v - (u + v - C(u, v)) = C(u, v),$$

$$\boxed{* \circ * = i}$$

$$(C^*(u, v))^* = 1 - C^*(1 - u, 1 - v) = 1 - (1 - C(u, v)) = C(u, v).$$

Probemos la parte triangular superior de la tabla:

$$\boxed{\wedge \circ \sim = *}$$

$$\widehat{(\widetilde{C}(u, v))} = u + v - 1 + \widehat{C}(1 - u, 1 - v)$$

$$\begin{aligned}
 &= u + v - 1 + (1 - u + 1 - v - C(1 - u, 1 - v)) \\
 &= 1 - C(1 - u, 1 - v) = C^*(u, v),
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\wedge \circ * = \sim}$$

$$\begin{aligned}
 (\widehat{C^*(u, v)}) &= u + v - 1 + C^*(1 - u, 1 - v) \\
 &= u + v - 1 + (1 - C(u, v)) = u + v - C(u, v) = \widetilde{C}(u, v),
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sim \circ * = \wedge}$$

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{\widehat{C}(u, v)}) &= u + v - \widehat{C}(u, v) = u + v - (u + v - 1 - C(1 - u, 1 - v)) \\
 &= 1 - C(1 - u, 1 - v) = C^*(u, v).
 \end{aligned}$$

Para asegurar la conmutatividad tenemos que probar también la parte triangular inferior:

$$\boxed{\sim \circ \wedge = *}$$

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{\widehat{C}(u, v)}) &= u + v - \widehat{C}(u, v) = u + v - (u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)) \\
 &= 1 - C(1 - u, 1 - v) = C^*(u, v),
 \end{aligned}$$

$$\boxed{* \circ \wedge = \sim}$$

$$\begin{aligned}
 (\widehat{C}(u, v))^* &= 1 - \widehat{C}(1 - u, 1 - v) = 1 - (1 - u + 1 - v - 1 + C(u, v)) \\
 &= u + v - C(u, v) = \widetilde{C}(u, v),
 \end{aligned}$$

$$\boxed{* \circ \sim = \wedge}$$

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{\widetilde{C}(u, v)}) &= u + v - 1 + \widetilde{C}(1 - u, 1 - v) \\
 &= u + v - 1 + (1 - u + 1 - v - C(1 - u, 1 - v)) \\
 &= 1 - C(1 - u, 1 - v) = C^*(u, v).
 \end{aligned}$$

Con esto queda probado que \wedge , \sim y $*$ forman el grupo dihédrico Dih_2 . □

A.4. Condición de Lipschitz y relación con la continuidad absoluta

En lo que sigue se recuerdan los conceptos de condición de Lipschitz y de continuidad absoluta para funciones definidas en \mathbb{R} . Se ve la relación de la definición *analítica* de la continuidad absoluta con la definición de la Teoría de la Medida y la relación entre la condición de Lipschitz y la continuidad absoluta.

Definición A.3. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* (a.c) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si la colección de intervalos disjuntos $\{[a_j, b_j]\}_{j=1, \dots, k}$ con $k \in \mathbb{N}$ verifica que $\sum_{j=1}^k |b_j - a_j| < \delta$, entonces $\sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$.

Definición A.4. Una función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* si la función \tilde{F} definida por

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & a \leq x \leq b \\ F(a), & x < a \\ F(b), & x > b \end{cases} \tag{A.13}$$

es absolutamente continua.

Teorema A.3. Una función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si existe una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es medible según la medida de Lebesgue (m) y tal que

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f \, dm, \quad \forall x : a \leq x \leq b. \tag{A.14}$$

Esta función f es la derivada de F según el cálculo usual.

Demostración. Puede verse en [3]. □

Definición A.5. Dada una función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I un intervalo de \mathbb{R} , se dice que es *Lipschitziana* o que *verifica la condición de Lipschitz* si existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se verifica la condición de Lipschitz

$$|F(x) - F(y)| \leq K |x - y|. \tag{A.15}$$

Observación A.1. Esta condición implica que en los puntos en los que exista la derivada de F , su módulo estará acotado por K :

$$|F'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \leq \frac{K |x+h-h|}{|h|} = K. \tag{A.16}$$

◁

Teorema A.4. *Sea una función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si F es Lipschitziana, entonces F es absolutamente continua. Recíprocamente, si F es absolutamente continua y $|F'| \leq K$, entonces F es Lipschitziana con constante K .*

Demostración. Supongamos que F es Lipschitziana con constante K . Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ tal que si la colección de intervalos disjuntos $\{[a_j, b_j]\}_{j=1, \dots, k}$ verifica que $\sum_{j=1}^k |b_j - a_j| < \delta$, y por tanto

$$\sum_{j=1}^k |F(b_j) - F(a_j)| \leq K \sum_{j=1}^k |b_j - a_j| < K\delta = \varepsilon. \tag{A.17}$$

Si F es absolutamente continua, su derivada $F' = f$ existe para casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue y por el Teorema A.3, podemos escribir para cualquier $x, y \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| F(a) + \int_{[a,x]} f \, dm - (F(a) + \int_{[a,y]} f \, dm) \right| \\ &\leq \int_x^y |f| \, dm \leq K |x - y|. \end{aligned}$$

Por tanto F es Lipschitziana con constante K . □

A.5. Convexidad y Medio-convexidad

Definición A.6. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo real I . Se dice que f es *convexa* si para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{A.18}$$

Definición A.7. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo real I . Se dice que f es *medio-convexa* si para todo $x, y \in I$,

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{A.19}$$

Proposición A.2. *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función **continua**. Si f es medio-convexa, entonces es convexa.*

Demostración. Se procede por reducción al absurdo.

Si f no es convexa, entonces existe un intervalo $[a, b]$ tal que el grafo de $f|_{[a,b]}$ no se

encuentra bajo el segmento que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, es decir, la función

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a), \quad x \in [a, b] \quad (\text{A.20})$$

verifica $\gamma = \sup \{\varphi(x) : x \in [a, b]\} > 0$. Observemos que φ es continua al serlo f y que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Además se comprueba fácilmente que φ es medio-convexa.

Sea $c = \inf \{x \in [a, b] : \varphi(x) = \gamma\}$, entonces $\varphi(c) = \gamma$ y $c \in (a, b)$. Por la definición de c , para toda cantidad $h > 0$ tal que $c \pm h \in (a, b)$ se tiene

$$\varphi(c - h) < \varphi(c) \text{ y } \varphi(c + h) \leq \varphi(c). \quad (\text{A.21})$$

Así pues:

$$\varphi(c) > \frac{\varphi(c - h) + \varphi(c + h)}{2}, \quad (\text{A.22})$$

una contradicción con el hecho de que φ sea medio-convexa. □

Apéndice B

Códigos para las simulaciones

B.1. Método condicional

```
## Ejemplo 5.1 – Ali–Mikhail–Haq ##

#Cópula AMH
u<-runif(500)
t<-runif(500)
v<-(u*sqrt(t))/(1-(1-u)*sqrt(t))
plot(u,v)

#Distribución H
x<-2*u-1
y<-log(1-v)
windows()
plot(x,y)

#Marginales normales
z<-qnorm(u)
t<-qnorm(v)
windows()
plot(z,t)

## Ejemplo 5.2 – cópula con componente singular ##

u<-runif(500)
t<-runif(500)

qinvCu=function(t,u,theta){
  res<-numeric(length(t))
  ind1<-which(t>(1-theta)/(1-theta+theta*u))
  ind2<-which(t<=(1-theta)/(1-theta+theta*u))
```

```

res[ind1]=(t[ind1]+theta-1)/theta
res[ind2]=(1-theta)*(1-u[ind2])/(1-theta+theta*u[ind2])
return(res)
}

```

```

v=qinvCu(t,u,0.2)
plot(u,v)

```

```

windows()
v=qinvCu(t,u,0.9)
plot(u,v)

```

```

## Ejemplo 5.3 – Clayton ##

```

```

library(scatterplot3d)
theta=5
n=500

```

```

#2-cópula

```

```

v1<-runif(n)
u1=v1
v2<-runif(n)
u2<-(u1^(-theta)*(v2^(-theta/(theta-1))-1)+1)^(-1/theta)
plot(u1,u2)

```

```

#3-cópula

```

```

v3<-runif(n)
u3<-((u1^(-theta)+u2^(-theta)-1)*(v3^(theta/(-2*theta-1))-1)+1)^(-1/theta)
windows()
scatterplot3d(u1,u2,u3,angle=45)

```

```

#Marginales normales

```

```

x1<-qnorm(u1)
x2<-qnorm(u2)
x3<-qnorm(u3)

windows()
plot(x1,x2)
windows()
scatterplot3d(x1,x2,x3,angle=45)

```

```
## Ejemplo 5.4 – Frank ##
```

```
library(scatterplot3d)
theta=10
n=500

#2–cópula
v1<-runif(n)
u1=v1
v2<-runif(n)
u2<- -1/theta*log(1+(v2*(1-exp(-theta)))/
  (v2*(exp(-theta*u1)-1)-exp(-theta*u1)))
plot(u1,u2)
```

```
#3–cópula
```

```
v3<-runif(n)
a<-(exp(-theta)-1)*((exp(-theta)-1)+(exp(-theta*u1)-1)*(exp(-theta*u2)-1))^2
b<-(exp(-theta)-1)^2
c<-(exp(-theta*u1)-1)*(exp(-theta*u2)-1)

A<-v3*c^2
B<-2*v3*b*c-a
C<-v3*b^2

x<-(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A)
u3<- -log(x+1)/theta

windows()
scatterplot3d(u1,u2,u3)
```

B.2. Simulación de cópulas Arquimedianas

```
## Ejemplo 5.5 – Gumbel ##
```

```
#Funciones necesarias
```

```
phi=function(t,theta){(-log(t))^theta}
invphi=function(u,theta){exp(-u^(1/theta))}
Kc=function(z,theta){z*(theta-log(z))/theta}
invKc=function(t){uniroot(function(z){Kc(z,theta)-t},
  interval=c(1e-9,1))$root}

theta=2
n=500
t=runif(n)
w=runif(n)
```

```

z<-sapply(t,invKc)
u=invphi(w*phi(z,theta),theta)
v=invphi((1-w)*phi(z,theta),theta)
plot(u,v)

## Ejemplo 5.6 ##

n<-500
theta<-7

u<-runif(n)
t<-runif(n)

phi=function(t,theta){(1-t)^theta}
derphi=function(t,theta){-theta*(1-t)^(theta-1)}

invderphi=function(u,theta){
  res<-numeric(length(u))
  ind1=which(0>=u & u>=-theta)
  ind2=which(u<=-theta)
  res[ind1]=1-(-u[ind1]/theta)^(1/(theta-1))
  res[ind2]=0
  return(res)
}

invphi=function(u,theta){
  res<-numeric(length(u))
  ind1=which(0<=u & u<=1)
  ind2=which(u>1)
  res[ind1]=1-u[ind1]^(1/theta)
  res[ind2]=0
  return(res)
}

s<-invderphi(derphi(u,theta)/t,theta)
v<-invphi(phi(s,theta)-phi(u,theta),theta)

#Cópula
plot(u,v)

#Marginales normales
x=qnorm(u)
y=qnorm(v)
windows()
plot(x,y)

```

B.3. Método de Marshall y Olkin

```
## Ejemplo 5.7 – Clayton ##
```

```
TF=function(s,theta){(1+s)^(-1/theta)}
```

```
n=500
```

```
theta=5
```

```
gamma=rgamma(n,scale=1,shape=1/theta)
```

```
v1=runif(n)
```

```
v2=runif(n)
```

```
u1=TF(-log(v1)/gamma,theta)
```

```
u2=TF(-log(v2)/gamma,theta)
```

```
plot(u1,u2)
```

```
## Ejemplo 5.8 – Gumbel ##
```

```
library(fBasics)
```

```
library(scatterplot3d)
```

```
TF=function(s,theta){exp(-s^(1/theta))}
```

```
n=1000
```

```
theta=3
```

```
#Generar PS(alpha,1) por el paquete fBasics
```

```
gamma<-rstable(n,1/theta,1,cos(pi/(2*theta))^theta,0,0)
```

```
#Generar PS(alpha,1) según Trivedi
```

```
eta<-runif(n,0,pi)
```

```
w<-rexp(n,1)
```

```
a=1/theta
```

```
z=(sin((1-a)*eta)*(sin(a*eta))^(a/(1-a)))/(sin(eta)^(1/(1-a)))
```

```
gamma=(z/w)^((1-a)/a)
```

```
v1=runif(n)
```

```
v2=runif(n)
```

```
v3=runif(n)
```

```
u1=TF(-log(v1)/gamma,theta)
```

```
u2=TF(-log(v2)/gamma,theta)
```

```

u3=TF( -log(v3)/gamma , theta)

plot(u1 , u2)
windows()
scatterplot3d(u1 , u2 , u3)

### Ejemplo 5.9 – Ali–Mikhail–Haq ###

library(scatterplot3d)

TF=function(s , theta){(1 -theta)*exp( -s)/(1 -theta*exp( -s))}

n=1000
theta=0.9

gamma=rgeom(n , prob=1 -theta)

v1=runif(n)
v2=runif(n)
v3=runif(n)

u1=TF( -log(v1)/gamma , theta)
u2=TF( -log(v2)/gamma , theta)
u3=TF( -log(v3)/gamma , theta)

plot(u1 , u2)
windows()
scatterplot3d(u1 , u2 , u3)

```

B.4. Algunos algoritmos particulares

```

### Ejemplo 5.10 – Cópula Gaussiana ###

n=500
ndim=3
set.seed(123456)

R=matrix(c(1 , -0.85 , 0.7 , -0.85 , 1 , -0.5 , 0.7 , -0.5 , 1) , ncol=3 , byrow=T)

A=t(chol(R))

z=matrix(rnorm(n*ndim) , ncol=ndim , nrow=n)

x=t(apply(z , 1 , function(s){A%*%s}))

```



```
u=pnorm(x)

#Cópula
windows()
pairs(u)

#Marginales normales
windows()
pairs(qnorm(u),xlim=c(-3.5,3.5),ylim=c(-3.5,3.5))

## Ejemplo 5.11 – Cópula t-Student ##

n=500
ndim=3
v=2
set.seed(123456)

R=matrix(c(1, -0.85, 0.7, -0.85, 1, -0.5, 0.7, -0.5, 1),ncol=3,byrow=T)

A=t(chol(R))

z=matrix(rnorm(n*ndim),ncol=ndim,nrow=n)

s=rchisq(n,v)

y=t(apply(z,1,function(s){A%*%s}))

x=sqrt(v/s)*y

u=pt(x,v)

#Cópula
windows()
pairs(u)

#Marginales normales
windows()
pairs(qnorm(u),xlim=c(-3.5,3.5),ylim=c(-3.5,3.5))

## Ejemplo 5.12 – Cópula de FGM ##

n=1000
theta= -1

u=runif(n)
```

```

t=runif(n)

a=theta*(2*u-1)-1
b=sqrt((1-theta*(2*u-1))^2+4*theta*t*(2*u-1))

v=2*t/(b-a)

#Cópula
plot(u,v)

#Marginales normales
x=qnorm(u)
y=qnorm(v)
windows()
plot(x,y,xlim=c(-3.5,3.5),ylim=c(-3.5,3.5))

## Ejemplo 5.13 – Cópula de Plackett ##

n=500
theta=20

u=runif(n)
t=runif(n)

a=t*(1-t)
b=theta+a*(theta-1)^2
c=2*a*(u*theta^2+1-u)+theta*(1-2*a)
d=sqrt(theta)*sqrt(theta+4*a*u*(1-u)*(1-theta)^2)

v=(c-(1-2*t)*d)/(2*b)

#Cópula
plot(u,v)

#Marginales normales
x=qnorm(u)
y=qnorm(v)
windows()
plot(x,y,xlim=c(-3.5,3.5),ylim=c(-3.5,3.5))

```

Apéndice C

Códigos para las aplicaciones

C.1. Aplicación a la regresión cuantil

```
## Regresión cuantil con cópulas – funciones comunes ##

library(copula)

# Función de distribución empírica y función cuantil empírica
# a partir de unas observaciones obs

Fn=function(x,obs){
  fn=function(s){length(which(obs<=s))/length(obs)}
  sapply(x,fn)
}
invFn=function(u,obs){
  invfn=function(v){max(obs[which(Fn(obs,obs)<=v])]}
  sapply(u,invfn)
}

## Ejemplo 7.1 Plackett ##

theta<-0.1
muestra_cop<-rcopula(plackettCopula(theta),500)

#Marginales uniformes
plot(muestra_cop)
u=seq(0,1,by=0.01)
v=(1+(theta-1)*u)/(theta+1)
lines(u,v,col="red",lwd=3)

#Marginales normales N(3,1) y N(0,5)
muestra_cop_norm=cbind(qnorm(muestra_cop[,1],3,1),
```

```

                                qnorm(muestra_cop[,2],0,5))

windows()
plot(muestra_cop_norm)
x=seq(min(muestra_cop_norm[,1]),max(muestra_cop_norm[,1]),by=0.01)
y=qnorm((1+(theta-1)*pnorm(x,3,1))/(theta+1),0,5)
lines(x,y,col="red",lwd=3)

## Ejemplo 7.2 Gaussiana ##

rho<-0.8
muestra_cop<-rcopula(normalCopula(rho),500)

#Marginales uniformes
plot(muestra_cop)
u=seq(0,1,by=0.01)
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  v=pnorm(rho*qnorm(u)+sqrt(1-rho^2)*qnorm(p))
  lines(u,v,col="red",lwd=3)
}

#Marginales Weibull(3,2) y Weibull(5,5)
muestra_cop_we=cbind(qweibull(muestra_cop[,1],2,3),
                    qweibull(muestra_cop[,2],5,5))

windows()
plot(muestra_cop_we)
x=seq(min(muestra_cop_we[,1]),max(muestra_cop_we[,1]),by=0.01)
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  y=qweibull(pnorm(rho*qnorm(pweibull(x,2,3))+sqrt(1-rho^2)*qnorm(p)),5,5)
  lines(x,y,col="red",lwd=3)
}
legend("bottomright",legend=c(" Reales", " Estimados"),
      col=c("red", "blue"),lwd=2)

#Estimación de las curvas cuantiles
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  ytilde=invFn(pnorm(rho*qnorm(Fn(x,muestra_cop_we[,1]))+
                    sqrt(1-rho^2)*qnorm(p)),muestra_cop_we[,2])
  lines(x,ytilde,col="blue",lwd=2)
}

```

```

### Ejemplo 7.3 Frank ###

theta<-3
muestra_cop<-rcopula(archmCopula("frank",theta),500)

#Marginales uniformes
plot(muestra_cop)
u=seq(0,1,by=0.01)
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  v=-1/theta*log(1-(1-exp(-theta))/(1+exp(-theta*u)*(1/p-1)))
  lines(u,v,col="red",lwd=3)
}

#Marginales Gamma(4,5) y Student_2(3,10)
muestra_cop_gt=cbind(qgamma(muestra_cop[,1],5,2),
                    qt(muestra_cop[,2],df=10,4,15))

windows()
plot(muestra_cop_gt)
x=seq(min(muestra_cop_gt[,1]),max(muestra_cop_gt[,1]),by=0.01)
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  y=qt(-1/theta*log(1-(1-exp(-theta))/(1+exp(-theta*pgamma(x,5,2))
                    *(1/p-1))),df=10,4,15)
  lines(x,y,col="red",lwd=3)
}
legend("bottomright",legend=c("Reales","Estimados"),
      col=c("red","blue"),lwd=2)

#Estimación de las curvas cuantiles
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  ytilde=invFn(-1/theta*log(1-(1-exp(-theta))/(1+exp(-theta*
                    Fn(x,muestra_cop_gt[,1]))*(1/p-1))),muestra_cop_gt[,2])
  lines(x,ytilde,col="blue",lwd=2)
}

```

C.2. Método de Genest y Rivest para la estimación de cópulas Arquimedianas mediante la Tau de Kendall

```

library(fCopulae)
library(copula)
data(uranium)

## Exploración datos y Tau de Kendall ##

datos<-uranium[c(6,3)] # escandio y cobalto
n=length(datos[,1])

# Expresar los datos en cuantiles
datos_cuant<-apply(datos,2,rank)
datos_cuant<-datos_cuant/n

plot(datos[,1],datos[,2],xlab=names(datos)[1],ylab=names(datos)[2])

tau<-cor.test(datos[,1],datos[,2],method="kendall")$estimate
names(tau)<-NULL

## Taus máximas y mínimas para las 22 cópulas ##

mxtau=function(number,inf=100){
  tau=c(1,1,1/3,1,1,1,1,1/3,0,0,0,1,1,1,1,1/3,1,1,1,1,1,0)
  alpha=c(inf,inf,1,inf,inf,inf,0,inf,0,0,0,inf,inf,inf,inf,inf,inf,inf,
          inf,inf,inf,0)
  return(list("tau"=tau[number],"alpha"=alpha[number]))
}

mintau=function(number,inf=100){
  tau=c(-1,-1,(5-8*log(2))/3,0,-1,0,0,-1,-0.36132,-0.18172,-0.56491,1/3,
        -0.36132,1/3,-1,-1,-0.61035,1/3,1/3,0,-1,-0.46740)
  alpha=c(-1,1,-1,1,-inf,1,1,1,1,1,0.5,1,0,1,1,0,-inf,2,0,0,1,1)
  return(list("tau"=tau[number],"alpha"=alpha[number]))
}

## Estimación de los parámetros alpha para las 22 cópulas, ##
## cuando es posible ##

estim_alpha=function(ktau,num,inf=1e10,inf2=500){
  if(ktau>mxtau(num,inf)$tau){return(mxtau(num,inf)$alpha)}
  else if(ktau<mintau(num,inf)$tau){return(mintau(num,inf)$alpha)}
}

```

```

else
  uniroot(function(x){archmTau(alpha = x, type = as.character(num),
    lower = 1.0e-10)-ktau}, interval=c(mintau(num)$alpha,
    maxtau(num)$alpha))$root
}

# Parámetros estimados
mapply(estim_alpha, rep(tau, 22), 1:22) -> alpha_hat

## Estimación no paramétrica de K ##

z=numeric(n)
for(i in 1:n){
  z[i]<-length(which(datos[,1]<datos[i,1] & datos[,2]<datos[i,2]))/(n-1)
}

Kt=Vectorize(function(x){length(which(z<x))/n},"x")

## Distancias L2, L1 y LInf ##

dl2<-rep(NA, 22)
dl1<-rep(NA, 22)
dli<-rep(NA, 22)

kfun<-Vectorize(Kfunc, "x")

for(i in 1:22){
  j<-as.character(i)
  dl2[i]<-sqrt(integrate(function(x){(kfun(x, alpha=alpha_hat[i], type=j)
    -Kt(x))^2}, 0, 1, subdivisions=600)$value)
  dl1[i]<-integrate(function(x){abs(kfun(x, alpha=alpha_hat[i], type=j)
    -Kt(x))}, 0, 1, subdivisions=600)$value
  dli[i]<-optimize(function(x){abs(kfun(x, alpha=alpha_hat[i], type=j)
    -Kt(x))}, maximum=T, interval=c(0,1))$objective
}

# Mejores ajustes (usamos L2)
(best<-which.min(dl2))
which.min(dl1)
which.min(dli)

## Gráficas de lambda(t) ##

# Identificar los 5 mejores ajustes
dibujar=sort(dl2, index.return=T)$ix[1:5]
color=c("red", "dodgerblue4", "green", "deeppink3", "darkorange2")

```

```

nelsen<-c(paste("N",dibujar[1],sep=""),paste("N",dibujar[2],sep=""),
         paste("N",dibujar[3],sep=""),paste("N",dibujar[4],sep=""),
         paste("N",dibujar[5],sep=""))

# Funciones lambda
lambdakt=function(x){x-Kt(x)}
lambdaKfunc=function(x,alpha,num){x-Kfunc(x,alpha,type=num)}

#Gráficas
x<-seq(0,1,by=0.005)
plot(x,lambdakt(x),type="l",ylim=c(-0.25,0),lwd=3)
lines(x,lambdaKfunc(x,alpha_hat[best],as.character(best)),type="l",col="red",
      lwd=3)

for(i in 1:5){
  lines(x,lambdaKfunc(x,alpha_hat[dibujar[i]],
                    as.character(dibujar[i])),type="l",col=color[i],lwd=1.5)
}

legend("bottomright",legend=c(expression(lambda[n](t)),nelsen),
      col=c("black","red","dodgerblue4","green","deeppink3","darkorange2"),
      lwd=2)

## Supervivencia ##

# Estimación de K
w=numeric(n)
for(i in 1:n){
  w[i]<-length(which(datos[,1]>datos[i,1] & datos[,2]>datos[i,2]))/(n-1)
}

Kts=function(x){length(which(w<x))/n}
Kts=Vectorize(Kts,"x")

dl2s<-rep(NA,22)
dl1s<-rep(NA,22)
dlis<-rep(NA,22)

for(i in 1:22){
  j<-as.character(i)
  dl2s[i]<-sqrt(integrate(function(x){(kfun(x,alpha=alpha_hat[i],type=j)
                                -Kts(x))^2},0,1,subdivisions=600)$value)
  dl1s[i]<-integrate(function(x){abs(kfun(x,alpha=alpha_hat[i],type=j)
                                -Kts(x))},0,1,subdivisions=600)$value
  dlis[i]<-optimize(function(x){abs(kfun(x,alpha=alpha_hat[i],type=j)
                                -Kts(x))},maximum=T,interval=c(0,1))$objective
}

```



```

}
# Mejores ajustes
(bests<-which.min(e12s))
which.min(e11s)
which.min(elis)

# Gráficas
dibujars=sort(e12s, index.return=T)$ix[1:5]
nellsens<-c(paste("N",dibujars[1],sep=""),paste("N",dibujars[2],sep=""),
            paste("N",dibujars[3],sep=""),paste("N",dibujars[4],sep=""),
            paste("N",dibujars[5],sep=""))

lambdakts=function(x){x-Kts(x)}

x<-seq(0,1,by=0.005)

plot(x,sapply(x,lambdakts),type="l",ylim=c(-0.25,0),lwd=3)
lines(x,lambdakfunc(x,alpha_hat[bests],as.character(bests)),
      type="l",col="red",lwd=3)

for(i in 1:5){
  lines(x,lambdakfunc(x,alpha_hat[dibujars[i]],
                    as.character(dibujars[i])),type="l",col=color[i],lwd=1.5)
}

legend("bottomright",legend=c(expression(lambda[n](t)),nellsens),
      col=c("black","red","dodgerblue4","green","deeppink3","darkorange2"),
      lwd=2)

## Regresión cuantil ##

invderPhi<-function(t,alpha,n){
  uniroot(function(s){t-Phi(s,alpha,n,deriv="1")},tol=1e-6,
          interval=c(0+1e-10,1-1e-10))$root
}

regquant=function(u,p=0.5,alpha,num){
  n<-as.character(num)
  if(u==0){u=1e-6};if(u==1){u=1-1e-6}
  x<-invderPhi(Phi(u,alpha,n,deriv="1")/p,alpha,n)
  Phi(Phi(x,alpha,n)-Phi(u,alpha,n),alpha,n,inv=T)
}
regquant=Vectorize(regquant,"u")

```

```

# Datos en cuantiles

plot(datos_cuant[,1],datos_cuant[,2])
u=seq(0,1,by=0.01)

for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  v=regquant(u,p=p,alpha=alpha_hat[best],num=best)
  lines(u,v,col="red",lwd=3)
}

# Mediante las distribuciones empíricas de las marginales

Fn=function(x,obs){
  fn=function(s){length(which(obs<=s))/length(obs)}
  sapply(x,fn)
}
invFn=function(u,obs){
  invfn=function(v){max(obs[which(Fn(obs,obs)<=v])]}
  sapply(u,invfn)
}

regcuantil_datos=function(x,datos,p=0.5,alpha,num){
  a<-sapply(Fn(x,datos[,1]),regquant,p,alpha,num)
  y<-invFn(a,datos[,2])
}

windows()
plot(datos[,1],datos[,2],xlab="Sc",ylab="Co")
xx<-seq(min(datos[,1]),max(datos[,1]),by=0.01)
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  yy=regcuantil_datos(xx,datos,p=p,alpha=alpha_hat[best],num=best)
  lines(xx,yy,col="red",lwd=3)
}

# Mediante estimación núcleo para las marginales

# Densidad estimación núcleo
dkernel<-function(x,muestra,dker=dnorm,h){
  sapply(x,function(x){sum(dker((x-muestra)/h))/(h*length(muestra))})
}

# Distribución estimación núcleo
pkernel<-function(x,muestra,pker=pnorm,h){
  sapply(x,function(x){sum(pker((x-muestra)/h))/(length(muestra))})
}

```

```

# Inversa distribución estimación núcleo
qkernel<-function(u,muestra,pker=pnorm,h){
  sapply(u,function(u){uniroot(function(x){u-pkernel(x,muestra,pker,h)},
                                interval=c(-10,10),tol=1e-6)$root)})
}

# Ventanas por validación cruzada
hcv1<-bw.bcv(datos[,1])
hcv2<-bw.bcv(datos[,2])

par(mfrow=c(1,2))
hist(datos[,1],freq=F,breaks=20)
lines(density(datos[,1],bw=hcv1),lwd=2,col="red")
rug(datos[,1],col="dodgerblue")

hist(datos[,2],freq=F,breaks=20)
lines(density(datos[,2],bw=hcv2),lwd=2,col="red")
rug(datos[,2],col="dodgerblue")

regcuantil_datos_nucleo=function(x,datos,p=0.5,alpha,num){
  a<-sapply(pkernel(x,datos[,1],h=hcv1),regquant,p,alpha,num)
  y<-qkernel(a,datos[,2],h=hcv2)
}

windows()
plot(datos[,1],datos[,2],xlab="Sc",ylab="Co")
for(p in c(0.05,0.25,0.5,0.75,0.95)){
  zz=regcuantil_datos_nucleo(xx,datos,p=p,alpha=alpha_hat[best],num=best)
  lines(xx,zz,col="blue",lwd=3)
}

```


Bibliografía

- [1] C. Alsina, M. J. Frank, y B. Schweizer. *Associative functions: Triangular norms and copulas*. World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2006.
- [2] M. Armstrong. Copula Catalogue. Part 1: Bivariate Archimedean copulas. <http://www.cerna.ensmp.fr/Documents/MA-CopulaCatalogue.pdf>, ago. 2003.
- [3] K. B. Athreya y S. N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2006.
- [4] N. Balakrishnan y C.-D. Lai. *Continuous bivariate distributions*. Springer, New York, 2009.
- [5] E. Bouyé y M. Salmon. Dynamic Copula Quantile Regressions and Tail Area Dynamic Dependence in Forex Markets. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1129855, sep. 2002.
- [6] R. Braekers y I. Van Keilegom. Flexible modeling based on copulas in nonparametric regression. <http://www.stat.ucl.ac.be/ISpub>, nov. 2007.
- [7] J. M. Chambers, C. L. Mallows, y B. W. Stuck. A method for simulating stable random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 71(354):340–344, 1976.
- [8] U. Cherubini, E. Luciano, y W. Vecchiato. *Copula methods in finance*. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2004.
- [9] D. Conway. Plackett family of distributions. En N. Balakrishnan et al., editores, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 9, págs. 6164–6168. John Wiley & Sons Ltd., New York, 2006.
- [10] R. D. Cook y M. E. Johnson. Generalized Burr–Pareto–logistic distributions with applications to a uranium exploration data set. *Technometrics*, 28(2):123–131, 1986.
- [11] G. J. Crane. *Copulas for Credit Derivative Pricing and other Applications*. PhD thesis, University of Adelaide, 2009. <http://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/50729/2/01front.pdf>.

- [12] G. Dall’Aglío, S. Kotz, y G. Salinetti. *Advances in probability distributions with given marginals. Beyond the copulas*, vol. 67 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Ponencias del Symposium on Distributions with Given Marginals celebrado en Roma, Abril 1990.
- [13] P. Deheuvels. A non parametric test for independence. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 26(2):29–50, 1981.
- [14] L. Devroye. *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, New York etc., 1986.
- [15] J. Dhaene, M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas, y D. Vyncke. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance Math. Econom.*, 31(1):3–33, 2002. 5th IME Conference (University Park, PA, 2001).
- [16] J. Dobrić y F. Schmid. A goodness of fit test for copulas based on Rosenblatt’s transformation. *Comput. Statist. Data Anal.*, 51(9):4633–4642, 2007.
- [17] D. Drouot Mari y S. Kotz. *Correlation and dependence*. Imperial College Press, London, 2001.
- [18] V. Durrelman, A. Nikeghbali, y T. Roncalli. Which copula is the right one? <http://www.thierry-roncalli.com/download/copula-choice.pdf>, ago. 2005.
- [19] P. Embrechets, F. Lindskog, y A. McNeil. Modelling Dependence with Copulas and applications to Risk Management. http://www.defaultrisk.com/pp_corr_19.htm, sep. 2001.
- [20] P. Embrechts, A. J. McNeil, y D. Straumann. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. En *Risk management: value at risk and beyond*, págs. 176–223. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [21] Y. Fan. Sharp Correlation Bounds and Their Applications. <http://www.econ.sinica.edu.tw/upload/file/20060606.pdf>, nov. 2005.
- [22] J. J. Fernández-Durán. Circular distributions based on nonnegative trigonometric sums. *Biometrics*, 60(2):499–503, 2004.
- [23] J. J. Fernández-Durán. Models for circular–linear and circular–circular data constructed from circular distributions based on nonnegative trigonometric sums. *Biometrics*, 63(2q):579–585, 2007.
- [24] N. Fisher. Copulas. En N. Balakrishnan et al., editores, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 2, págs. 1363–1367. John Wiley & Sons Ltd., New York, 2006.

- [25] M. J. Frank. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Math.*, 19(2-3):194–226, 1979.
- [26] G. A. Fredricks y R. B. Nelsen. Copulas constructed from diagonal sections. En *Distributions with given marginals and moment problems*, págs. 129–136. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [27] E. W. Frees y E. A. Valdez. Understanding relationships using copulas. *N. Am. Actuar. J.*, 2(1):1–25, 1998.
- [28] C. Genest y R. J. MacKay. Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canad. J. Statist.*, 14(2):145–159, 1986.
- [29] C. Genest y R. J. MacKay. The joy of copulas: bivariate distributions with uniform marginals. *Amer. Statist.*, 40(4):280–283, 1986.
- [30] C. Genest, J. J. Quesada-Molina, y J. A. Rodríguez-Lallena. De l'impossibilité de construire des lois à marges multidimensionnelles données à partir de copules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(6):723–726, 1995.
- [31] C. Genest, B. Rémillard, y D. Beaudoin. Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study. *Insurance Math. Econom.*, 44(2):199–213, 2009.
- [32] C. Genest y L.-P. Rivest. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 88(423):1034–1043, 1993.
- [33] P. Georges, A.-G. Lamy, E. Nicolas, G. Quibel, y T. Roncalli. Multivariate survival modelling: a unified approach with copulas. <http://ssrn.com/abstract=1032559>, mayo 2001.
- [34] P. Hall, G. S. Watson, y J. Cabrera. Kernel density estimation with spherical data. *Biometrika*, 74(4):751–762, 1987.
- [35] M. Hofert. Sampling Archimedean copulas. *Comput. Statist. Data Anal.*, 52(12):5163–5174, 2008.
- [36] H. Joe. *Multivariate models and dependence concepts*, vol. 73 de *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1997.
- [37] M. E. Johnson. *Multivariate statistical simulation*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., New York etc., 1987.
- [38] R. A. Johnson y T. E. Wehrly. Some angular-linear distributions and related regression models. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 73(363):602–606, 1978.

- [39] M. Junker y A. May. Measurement of aggregate risk with copulas. *Econom. J.*, 8(3):428–454, 2005.
- [40] P. C. Kettler. Fréchet–Hoeffding lower limit copulas in higher dimensions. <http://folk.uio.no/paulck/FHcop.pdf>, sep. 2008.
- [41] C. H. Kimberling. A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Math.*, 10:152–164, 1974.
- [42] R. Koenker. *Quantile regression*, vol. 38 de *Econometric Society Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [43] I. Kojadinovic y J. Yan. Modeling multivariate distributions with continuous margins using the copula R package. *Journal of Statistical Software*, 34(9):1–20, 2010.
- [44] T. A. Kpanzou. Copulas in Statistics. <http://resources.aims.ac.za/archive/2006/tchilabalo.pdf>, mayo 2007.
- [45] W. H. Kruskal. Ordinal measures of association. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 53:814–861, 1958.
- [46] X. Li, P. Mikusiński, y M. D. Taylor. Some integration–by–parts formulas involving 2–copulas. En *Distributions with given marginals and statistical modelling*, págs. 153–159. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [47] C.-h. Ling. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, 12:189–212, 1965.
- [48] K. V. Mardia. *Families of bivariate distributions*. No. 27 en Griffin’s Statistical Monographs and Courses. Hafner Publishing Co., Darien, Conn., 1970.
- [49] K. V. Mardia y P. E. Jupp. *Directional statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000.
- [50] A. W. Marshall y I. Olkin. Families of multivariate distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 83(403):834–841, 1988.
- [51] A. J. McNeil. Sampling nested Archimedean copulas. *J. Stat. Comput. Simul.*, 78(5–6):567–581, 2008.
- [52] A. J. McNeil y J. Nešlehová. Multivariate Archimedean copulas, d –monotone functions and l_1 –norm symmetric distributions. *Ann. Statist.*, 37(5B):3059–3097, 2009.
- [53] T. Mikosch. Copulas: Tales and facts. *Extremes*, 9(1):3–20, 2006.

- [54] P. Mikusiński, H. Sherwood, y M. D. Taylor. Probabilistic interpretations of copulas and their convex sums. En *Advances in probability distributions with given marginals*, vol. 67 de *Math. Appl.*, págs. 95–112. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [55] H.-G. Müller. Density estimation-ii. En N. Balakrishnan et al., editores, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 2, págs. 1611–1626. John Wiley & Sons Ltd., New York, 2006.
- [56] D. S. Moore y M. C. Spruill. Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit. *Ann. Statist.*, 3:599–616, 1975.
- [57] R. B. Nelsen. Concordance and copulas: a survey. En *Distributions with given marginals and statistical modelling*, págs. 169–177. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [58] R. B. Nelsen. Properties and aplicaciones of copulas: a brief survey. En *Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, págs. 10–28, 2003.
- [59] R. B. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, second edition, 2006.
- [60] R. B. Nelsen y G. A. Fredricks. Diagonal copulas. En *Distributions with given marginals and moment problems*, págs. 121–128. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [61] R. B. Nelsen, J. J. Quesada-Molina, y J. A. Rodríguez-Lallena. Bivariate copulas with cubic sections. *J. Nonparametr. Statist.*, 7(3):205–220, 1997.
- [62] R. B. Nelsen, J. J. Quesada-Molina, J. A. Rodríguez-Lallena, y M. Úbeda-Flores. Multivariate Archimedean quasi-copulas. En *Distributions with given marginals and statistical modelling*, págs. 179–185. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [63] J. P. Nolan. *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhäuser, Boston, 2010. En elaboración, Capítulo 1 disponible en <http://academic2.american.edu/~jpnolan>.
- [64] J. J. Quesada-Molina y J. A. Rodríguez-Lallena. Some advances in the study of the compatibility of three bivariate copulas. *J. Ital. Stat. Soc.*, 3(3):397–417, 1994.
- [65] A. Rényi. On measures of dependence. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 10:441–451 (unbound insert), 1959.

- [66] J. A. Rodríguez-Lallena y M. Úbeda-Flores. A new class of bivariate copulas. *Statist. Probab. Lett.*, 66(3):315–325, 2004.
- [67] C. Romano. Calibrating and simulating copula functions: an application to the italian stock market. <http://w3.uniroma1.it/cidem/Files/WPRomanodicembre02.pdf>, dic. 2002.
- [68] G. Samorodnitsky y M. S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York, 1994.
- [69] O. Scaillet. Kernel-based goodness-of-fit tests for copulas with fixed smoothing parameters. *J. Multivariate Anal.*, 98(3):533–543, 2007.
- [70] M. Scarsini. On measures of concordance. *Stochastica*, 8(3):201–218, 1984.
- [71] F. Schmid, R. Schmidt, T. Blumentritt, S. Gaißer, y M. Ruppert. Copula-based measures of multivariate association. http://www.wiso.uni-koeln.de/graduierntenkolleg/beteiligte/kollegiaten-Dateien/Paper/copula_based_measures.pdf.
- [72] B. Schweizer y A. Sklar. *Probabilistic metric spaces*. North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland Publishing Co., New York, 1983.
- [73] B. Schweizer y E. F. Wolff. On nonparametric measures of dependence for random variables. *Ann. Statist.*, 9(4):879–885, 1981.
- [74] R. T. Seeley. Classroom Notes: Fubini Implies Leibniz Implies $F_{yx} = F_{xy}$. *Amer. Math. Monthly*, 68(1):56–57, 1961.
- [75] A. Sklar. Random variables, joint distribution functions, and copulas. *Kybernetika*, 9:449–460, 1973.
- [76] A. Sklar. Random variables, distribution functions, and copulas—a personal look backward and forward. En *Distributions with fixed marginals and related topics*, vol. 28 de *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, págs. 1–14. Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1996.
- [77] C. C. Taylor. Automatic bandwidth selection for circular density estimation. *Comput. Statist. Data Anal.*, 52(7):3493–3500, 2008.
- [78] P. K. Trivedi y D. M. Zimmer. Copula Modeling: An Introduction for Practitioners. *Foundation and Trends in Econometrics*, 1(1):1–111, 2005.

- [79] D. Vyncke. *Comonotonicity: the perfect dependence*. PhD thesis, Catholic University of Leuven, 2003. <http://www.econ.kuleuven.be/insurance/pdfs/VynckePhD.pdf>.
- [80] T. E. Wehrly y R. A. Johnson. Bivariate models for dependence of angular observations and a related Markov process. *Biometrika*, 67(1):255–256, 1980.
- [81] D. V. Widder. *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.
- [82] D. Wuertz et al. *fCopulae: Rmetrics - Dependence Structures with Copulas*, 2009. R package version 2110.78.
- [83] J. Yan. Enjoy the joy of copulas: With a package copula. *Journal of Statistical Software*, 21(4):1–21, 2007.

Índice alfabético

- C -potencias, 101
- C -volumen, 3, 33, 61, 94
 - multidimensional, 47
- Beta de Blomqvist, 145–148
 - multivariante, 161
- cópula, 7
 - n -dimensional, 49
 - t de Student, 123–124, 204–205, 241
 - multivariante, 56
 - armónica, 82
 - Arquimediana, 90, 101, 112
 - anidada, 107
 - multivariante, 103–105
 - asociativa, 91, 101
 - cóncava, 83
 - circular–circular, 183
 - circular–lineal, 183
 - compatible, 86
 - con ciertas secciones diagonales, 77–78
 - con secciones
 - cúbicas, 76–77, 208–209
 - cuadráticas, 74–76
 - lineales, 73
 - convexa, 83
 - cota inferior, 9, 53, 210–211
 - cota superior, 9, 54, 204–205
 - de supervivencia, 36
 - multivariante, 57
 - directamente compatible, 85
 - dual, 38
 - empírica, 155–156
 - Gaussiana, 28, 122–124, 153, 168, 204–205, 240–241, 244
 - multivariante, 55
 - homogénea, 82
 - producto, 10, 82, 210–211
 - quasi–cóncava, 83
 - quasi–convexa, 83
 - Schur–cóncava, 83
 - Schur–convexa, 83
 - simétrica, 44, 91
 - singular, 62
- co–cópula, 38
- coeficiente
 - de correlación lineal, 133
 - de dependencia de la cola inferior, 151–154, 204–217
 - muestral, 157
 - de dependencia de la cola superior, 151–154, 204–217
 - muestral, 157
- componente
 - singular, 110, 235–236
- componente de una cópula
 - absolutamente continua, 30, 34, 54, 93
 - singular, 30, 34, 55, 93
- condición
 - de contorno para cópulas, 10, 74
 - de Lipschitz, 10, 74, 232–233
- conjunto
 - comonótono, 22

- contramonótono, 22
 de nivel, 10, 13
 no creciente, 22
 no decreciente, 22
 cotas de Fréchet–Hoeffding, 9, 52–54, 69
 densidad de una cópula, 30, 54, 93
 circular, 184, 202
 dependencia perfecta, 21
 negativa, 23, 25
 positiva, 23–25, 26
 descomposición de Cholesky, 123
 Desigualdad de Fréchet–Hoeffding, 9, 52
 distribución
 K de Kendall, 94–96, 116, 138, 170–174,
 177, 237–239
 t de Student, 168–169, 205
 circular, 180
 uniforme, 181
 condicional, 112
 de sumas trigonométricas no negativas
 (STNN), 182
 de von Mises, 181
 de Weibull, 168, 195
 empírica, 155–156, 167–171
 estable, 120–121, 240
 Gamma, 120, 168–169, 239
 geométrica, 121, 240
 Normal, 168, 205
 estadísticos circulares, 190
 estimación
 en dos etapas, 35, 185
 núcleo, 168, 185
 circular, 186–187, 198
 familia de cópulas
 comprehensiva, 12
 de Ali–Mikhail–Haq, 7, 45, 79–80, 110,
 121–122, 127, 210–211, 235, 240
 de Clayton, 91, 100, 105, 113–114, 120,
 141, 210–211, 236, 239
 de Cuadras–Augé, 8, 12, 31, 44, 45, 82,
 204–205
 de Farlie–Gumbel–Morgenstern, 72, 125,
 143, 144, 146, 204–205, 241–242
 de Fréchet, 44, 139, 143, 206–207
 de Frank, 91, 106, 115–116, 168–169, 210–
 211, 236–237, 244–245
 de Galambos, 206–207
 de Gumbel, 18, 90, 99, 107, 117, 120,
 146, 154, 210–211, 237–240
 de Gumbel–Barnett, 62, 210–211
 de Hüsler y Reiss, 206–207
 de Joe, 210–211
 de Mardia, 12, 46, 206–207
 de Marshall–Olkin, 31, 34, 139, 204–205
 de Plackett, 80–82, 126, 166–167, 204–
 205, 242–244
 de R.–Lallena y U.–Flores, 206–207
 de Raftery, 206–207
 Log–cópula, 210–211
 ordenada negativamente, 45
 ordenada positivamente, 45
 totalmente ordenada, 45
 frecuencia de la cópula empírica, 156
 función
 d –monótona, 102
 n –creciente, 48
 n –integral exponencial, 211, 216
 2–creciente, 4
 absolutamente monótona, 105
 cuantil, *véase* función quasi–inversa
 de Bessel, 181
 de Debye, 211
 de distribución, 13
 n –dimensional, 51
 bivariante, 13

- de supervivencia, 36
 - conjunta, 36, 37
 - multivariante, 57
- dilogaritmo, 211
- Gamma incompleta, 215
- grounded, 5
 - multivariante, 48
- hipergeométrica, 213
- integral
 - coseno hiperbólico, 215
 - seno hiperbólico, 215
- integral exponencial, 211
- inversa generalizada, *véase* función
 - quasi-inversa
- medio-convexa, 89, 233
- no decreciente, 4
 - en cada argumento, 4
- quasi-inversa, 16

- Gamma de Gini, 144–148, 158
 - muestral, 157
 - multivariante, 162
- generador, 90, 96–97
 - estricto, 90, 94, 104, 105
 - pseudo-inversa, 87
- grupo dihédrico, 40, 230–231

- independencia, 21, 54

- Lema
 - de extensión de una n -subcópula a una n -cópula, 51
 - de extensión de una subcópula a una cópula, 15, 223–228
- lista de cópulas
 - Arquimedianas de Nelsen [59], 170, 176, 204, 210–215, 246–251
 - B de Joe [36], 204–207, 210–211
 - BB de Joe [36], 204, 208–209, 214–217
- método
 - K , 117
 - algebraico, 78–82
 - condicional, 109–116, 235–237
 - de Box–Muller, 123
 - de Genest y Rivest, 170–179, 246–251
 - de inversión, 61, 84
 - de los momentos, 172
 - de Marshall–Olkin, 72, 85, 119–122, 239–240
 - delta, 172
- marginales
 - de una función bivalente, 5
 - multivariantes, 48
- medida
 - de concordancia, 131–138, 150
 - de dependencia, 131, 148–150
- mezcla de potencias, *véase* método de Marshall–Olkin
- mezclas de M , 66–70
- mixturas de cópulas, 71–72, 84

- odds ratio, 80
- orden de concordancia, 45, 58, 97–100

- paquete
 - CircNNTSR, 182, 196
 - MASS, 195
 - circular, 196
 - copula, 127, 174, 243–251
 - fBasics, 120
 - fCopulae, 127–129, 172, 175, 246–251
- problema
 - de la compatibilidad, 86
 - de la dimensionalidad, 185
- propiedad Arquimediana, 101
 - para cópulas, 102

- rectángulo, 3
 - n -dimensional, 47

- regresión cuantil, 165–170, 178, 243–245, 249–251
- representación canónica de la densidad, 34, 55, 183
- Rho de Spearman, 141–143, 146–148, 158, 204–217
- muestral, 156–157
 - multivariante, 161
- sección
- diagonal, 10
 - horizontal, 10
 - vertical, 10
- Sigma de Schweizer y Wolff, 150–151
- multivariante, 162
- subcópula, 7
- n -dimensional, 48
- suma
- convexa de cópulas, 70, 84
 - ordinal de cópulas, 64–66
 - trigonométrica, 182
- Tau de Kendall, 138–141, 146–148, 158, 170–174, 204–217
- muestral, 156–157, 171–174
 - multivariante, 161
- Teorema
- de Bernstein, 105
 - de Ling, 100
 - de Sklar, 14
 - n -dimensional, 51
 - para funciones de supervivencia, 37
 - del criterio de Abel para cópulas, 100
- transformada
- de Laplace, 72, 85, 105, 119–122
 - integral de probabilidad, 20
- variable aleatoria
- circular, 180
 - creciente en la cola derecha (RTI), 159
 - creciente en la cola izquierda (LTI), 159
 - decreciente en la cola derecha (RTD), 159
 - decreciente en la cola izquierda (LTD), 159
 - estable, 120–121
 - simétrica, 41
- variables aleatorias
- circular–circular, 182
 - circular–lineal, 182
 - comonótonas, 23
 - completamente dependientes, 68
 - contramonótonas, 23
 - dependientes
 - negativas en cuadrante (NQD), 158
 - positivas en cuadrante (PQD), 158
 - intercambiables, 44
- vector aleatorio
- comonótono, 23, 54
 - conjuntamente simétrico, 41–44
 - contramonótono, 23
 - dependiente negativo en ortante (NOD), 162
 - dependiente negativo en ortante inferior (NLOD), 162
 - dependiente negativo en ortante superior (NUOD), 162
 - dependiente positivo en ortante (POD), 162
 - dependiente positivo en ortante inferior (PLOD), 162
 - dependiente positivo en ortante superior (PUOD), 162
 - marginalmente simétrico, 41
 - radialmente simétrico, 41

